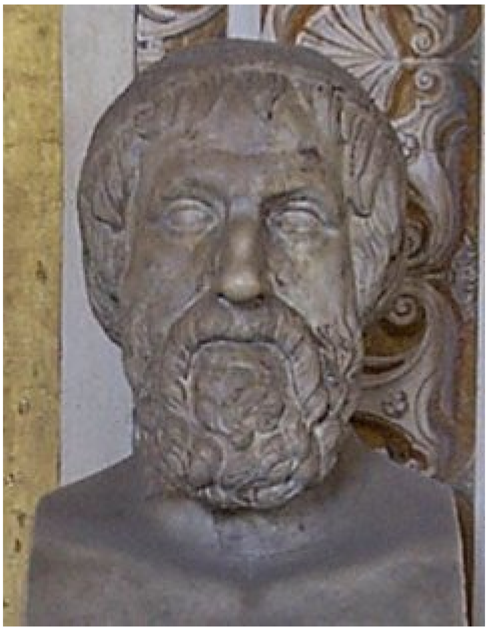
Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid ©

Die Erfindung des Beweisens

Norbert Froese

Stand: 02.02.2014



Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Indeed, seeing that so much of Greek is mathematics, it is arguable that, if one would understand the Greek genius fully, it would be a good plan to begin with geometry.

Sir Thomas Heath

Das 6. Jahrhundert (v.Chr.) war in vielen Kulturen eine Zeit des geistigen Umbruchs. Es war die Zeit des Konfuzius in China, Buddhas in Indien, Zarathustras in Persien und Hesekiels im Alten Testament. Auch im antiken Griechenland markiert das 6. Jahrhundert (v.Chr.) eine Zeit des Aufbruchs. Wegen der auffälligen Häufung großer kultureller Umbrüche in der Zeit von 800 – 200 v.Chr. und der Nachhaltigkeit der von diesen Umbrüchen ausgehenden kulturellen Prägungen hat der Philosoph *Karl Jaspers* hierfür den Begriff *Achsenzeit* geprägt. Obwohl nur ein kleiner Anteil der Bevölkerung des westlichen Kulturkreises griechischer Nationalität oder Abstammung ist, hat der für die westliche Kultur entscheidende Umbruch in der *griechischen Antike* stattgefunden.

Den griechischen Auf- und Umbruch versieht man dabei gern mit der Überschrift *Vom Mythos zum Logos*. Was unterscheidet nun aber die griechische Antike von den kulturellen Um- und Aufbrüchen in anderen Kulturen? Wieso war es ausgerechnet die griechische Antike, die so überaus eindrucksvoll den Weg *vom Mythos zum Logos* beschritt? Was verlieh gerade der griechischen Antike jene besondere Dynamik?

Es wäre vermessen so zu tun, als könnte man zu diesen Fragen wirklich verlässliche Antworten liefern. Aber es soll doch auf eine hier einschlägige, aber häufig nicht hinreichend gewürdigte Besonderheit der griechischen Antike hingewiesen werden: Die griechische Antike wurde *nicht zuletzt* durch die Erfindung der *beweisenden Mathematik* stimuliert und geprägt.

Vielleicht gab es hie und da auch in anderen Kulturkreisen erste Ansätze zur Entwicklung einer beweisenden Mathematik, aber *einzig* der griechischen Kultur ist es gelungen, aus solchen Zündfunken ein hell loderndes Feuer zu entfachen. Etwas zu Euklids *Elementen* auch nur entfernt Vergleichbares hat keine andere Kultur hervorgebracht, es sei denn in Anlehnung an das griechische Original. Wenn Thomas Heath feststellt, „*Mathematics in short is a Greek science, whatever new developments modern analysis has brought or may bring*“, dann kann man ihm einfach nicht sinnvoll widersprechen. Diese neue, griechische Art der Mathematik ist zugleich strenger wie abstrakter als ihre ägyptischen oder mesopotamischen Vorläufer. Diese beweisende Mathematik ist zudem eine ungeheuer wirksame Schule des Verstandes. Das Beweisen fordert und fördert eine besondere Erziehung und Kultivierung des Denkens. Dabei wird man für die Anstrengung der verlangten *Genauigkeit des Denkens* mit einer neuartigen Form der Sicherheit belohnt. Nun gibt es eine Form der logischen Evidenz, die sowohl eindrückliches Erlebnis, wie die Grundlage neuer *Gewissheiten* ist.

Noch heute, ca. 2.500 Jahre nach der Erfindung der beweisenden Mathematik, ist das Beweisen neuer Resultate ein faszinierendes intellektuelles Abenteuer und (im Erfolgsfall) stets mit einem Gefühl tiefer Befriedigung verbunden. Wie mag sich dies erst am Anfang der Geschichte der beweisenden Mathematik angefühlt haben? Damals wurden ja nicht nur einzelne Resultate bewiesen, sondern, noch viel imponierender, die Tore zu einem völlig neuartigen Typ von Gewissheit aufgestoßen.

Mögen viele der Resultate der ersten Generation griechischer Mathematiker bereits vorher zum tradierten Kulturgut der Ägypter oder Babylonier gehört haben, die Griechen haben das Wissen dieser älteren Hochkulturen jedoch nicht einfach nachgeplappert, sondern sie haben es *bewiesen*. Etwas, was weder Ägypter noch Babylonier kannten oder konnten.

Natürlich war die Entwicklung der beweisenden Mathematik eine Sache von Wenigen. Aber diese Wenigen verrichteten ihr Werk im Zentrum (und nicht an der Peripherie) des griechischen Kulturlebens. Die griechische Mathematik wurde nicht von randständigen, dem gewöhnlichen Griechen vollständig unbekannten Geistesgrößen betrieben. Nein, im

Gegenteil: Namen wie *Thales* und *Pythagoras* (denen man bereits in der Antike die als Großtaten gepriesenen ersten Beweise von mathematischen Sätzen nachsagte) hatten schon damals einen Klang wie Donnerhall.
Die meist aristokratischen *Gentleman-Gelehrten* der griechischen Antike wie die griechischen *Sophisten* haben nicht nur philosophische, ethische und philologische Studien betrieben, sich nicht nur in Rhetorik und Grammatik geübt, sondern etliche von ihnen haben sich auch höchst ambitioniert mit beweisender Mathematik beschäftigt.
Für die *Gentleman-Gelehrten* gehörte dies zu ihren frei gewählten Gelehrtentätigkeiten. Sie erwarteten dafür nichts außer etwas Anerkennung und im Glücksfall Ruhm. Aber dies war für viele der wohlhabenden aristokratischen Oberschicht Anreiz genug. Durch eine glückliche Geburt von den Sorgen der ökonomischen Existenzsicherung freigestellt, entschieden sich viele Zöglinge der wohlhabenden Oberschicht für die Rolle eines Gentleman-Gelehrten. Für die *Sophisten* hingegen war das Ganze eine Sache des Gelderwerbs. Es zeigte sich, dass bald eine Nachfrage nach bezahlter Unterweisung in beweisender Mathematik entstand. Mathematisch Talentierte konnten so schon früh ihre Neigung zum Beruf machen.
Die Aufnahme von Einführungen in Geometrie und Arithmetik in die Sekundar-Ausbildung von 14 bis 18 Jährigen tat ein Übriges, um die neue Form des Verstandesgebrauchs zumindest in der Oberschicht zu verbreiten.
Die bei den Abhandlungen zur griechischen Antike noch immer häufig etwas stiefmütterliche Behandlung der Mathematik ist also keineswegs gerechtfertigt. Im Gegenteil, das für die griechische Antike so typische nachdrückliche Insistieren auf dem Unterschied zwischen *Wissen* und bloßem *Meinen* wird erst dann richtig verständlich, wenn man die damals neuen Erfahrungen aus dem Bereich der beweisenden Mathematik bedenkt.

Die Protagonisten des griechischen Aufklärungsprozesses verfügen über die (zu recht) immer wieder bewunderte innere Freiheit, sich von allerlei Ballast und Unsinn aus ihrer kulturellen Tradition zu befreien. Dies erscheint in einem ganz anderen Licht, wenn man bedenkt, dass das Vertrauen in die Verlässlichkeit des eigenen Urteils durch die Erfahrung der beweisenden Mathematik einen riesigen Auftrieb erhalten hat. Wenn man mit dem eigenen Verstande Dinge beweisen kann, an denen selbst ein Gott nicht mehr rütteln kann, was sollen einen da Jahrhunderte kultureller Tradition beeindrucken können?

Dass man sich in kleinen sozialen Inseln mit nur wenigen Mitgliedern sowohl deutlich als auch anscheinend relativ leicht von den Inhalten der ererbten Denkwelt der Väter verabschieden konnte – und das, obwohl es (zunächst) kaum gelingt, Anhänger zu gewinnen – wirkt ungleich viel verständlicher, wenn man sich die diesen Prozess initiierenden „Sonderlinge“ als Mathematiker vorstellt. Eine durch die Faszinationen der beweisenden Mathematik geprägte Persönlichkeit wird nicht davon beunruhigt, dass fast alle anderen fast alles ganz anders sehen. Das ist halt nun einfach mal so. Das kann man weder ändern, noch ist man dafür verantwortlich. Aber das ist natürlich auch nicht der allergeringste Anlass, die eigene Weltsicht zu ändern. Das, was vielen im Normalbetrieb des Alltags als Neigung zum Sonderbaren erscheint, ist genau die Mentalität, die radikalen geistigen Umbrüchen äußert förderlich ist. Es gehört zu den Stärken der griechischen Kultur, dass sie dieses „Sonderbare“ nicht ächtet, sondern als Triebkraft der kulturellen Innovation zu nutzen weiß.

In puncto Talent zur inneren Absonderung konkurriert ein mathematisches Naturell einzig mit religiösem Sektierertum. Die Pythagoreer verbinden das eine mit dem anderen. Als mathematisch-religiöse Sekte sind sie die ideale Kinderstube für einige damals sehr ungewöhnliche Ideen. Die dort gepflegten Lehren sind gut davor geschützt, von einem gänzlich anders gestimmten Mainstream erdrückt zu werden.

Viele Details der Anfänge der antiken Aufklärung liegen leider hinter einem undurchdringlichen Nebel. Und so mangelt es bei solchen Überlegungen immer an einer befriedigenden Anzahl direkter historischer Belege. Hinsichtlich Plausibilität können sich die hier skizzierten Überlegungen jedoch problemlos mit anders gearteten spekulativen Ausdeutungen der Dynamik der griechischen Antike messen.

Ab Platon und Aristoteles verbessert sich die Quellenlage dramatisch. Und gerade diese beiden, die für uns heute als erste unter den antiken Berühmtheiten mit einiger Deutlichkeit zu fassen sind, sind in ihren philosophischen Überlegungen ganz offensichtlich tief durch die beweisende Mathematik geprägt.

Ihren *Idealtyp des Wissens* entlehnen *beide* der beweisenden Mathematik. Sowohl die *Ideenlehre* Platons wie die *Wissenschaftslehre* des Aristoteles orientieren sich (auf die ihnen je eigene Weise) an den Erfolgsrezepten der *beweisenden Mathematik*. Weder die Verehrung Platons für die vom sinnlich Erfahrbaren abstrahierenden Denkansätze der Geometrie, noch die aristotelische Verehrung des Beweisens, hätten ohne die neue Art der Mathematik über eine Grundlage verfügt. Auch dass beide (Platon wie Aristoteles) ein scheinbar so kleines mathematisches Spezialresultat wie die Entdeckung inkommensurabler Strecken in ihren Schriften diskutieren und dieses (für eine pythagoreische Weltsicht überaus störende) Resultat dabei beinahe als eine Art *Wendepunkt* des griechischen Denkens erscheinen lassen, macht deutlich, mit welcher Aufmerksamkeit beide das mathematische Geschehen verfolgt haben.

Mehr noch: Platons Akademie war ebenso ein Forum für mathematische wie philosophische Fragen. Und die aus heutiger Sicht Hauptleistung des aristotelischen Denkens, die Entwicklung der syllogistischen Logik, ist nicht zuletzt ein Beleg dafür, welche Bedeutung Aristoteles der (durch die beweisende Mathematik vorangetriebenen) Kultivierung des logischen Denkens beimaß.

Die hier betriebene *besonders nachdrückliche* Unterstreichung des (höchst bedeutsamen) Beitrags der *beweisenden Mathematik* zur griechischen Antike erfolgt auch als Reaktion auf die anderen Ortes häufig anzutreffende Ignoranz dieses Punkts.[1] Im folgenden Text wird der Einfluss der antiken Mathematik auf andere Bereiche der antiken Kultur zunächst nur ganz am Rande eine Rolle spielen. In den Abschnitten am Ende des Papiers wird jedoch darauf ausdrücklich zurückgekommen.

Bei der Auswahl des Stoffs aus der frühen griechischen Mathematik hat der Umstand, dass die Anfänge der beweisenden Mathematik ein Thema von allgemein kulturgeschichtlicher Bedeutung (und nicht nur von innermathematischem Interesse) sind, einen gewissen Einfluss gehabt. Im Zweifelsfall wurde bei der Stoffauswahl Aspekten mit großer Außenwirkung der Vorrang vor Themen mit rein innermathematischer Relevanz eingeräumt. So wird der entsprechend vorgebildete Leser einen Abschnitt zu *Gnomon*, *geometrischer Algebra* und *quadratischen Gleichungen* vermissen. Natürlich sind dies für die Entwicklung der griechischen Mathematik alles überaus erhebliche Stichworte. Aber sie haben eben längst nicht die außermathematische Bedeutung wie z.B. die Entdeckung *inkommensurabler Strecken*, die hier relativ ausgiebig diskutiert wird.

Ansonsten leidet dieser Versuch zum Thema frühe griechische Mathematik daran, dass es einen dramatischen Mangel an verlässlichen Quellen gibt, und dass ein unangenehm hoher Prozentsatz der Geschichtsschreibung leider nur aus (mehr oder minder) intelligenten Spekulationen besteht. Das ist in vielen Fällen aber eben das Einzige, was man anbieten kann.

Hinweis: Obwohl sich dieser Text stark auf Standardwerke stützt und reichlich Zitate einbindet, ist die hier präsentierte Sicht *nicht in jedem einzelnen Punkt* allgemein akzeptiert.

1 Dabei sollen etliche andere, den geistigen Aufbruch in der griechischen Antike ebenfalls begünstigende Faktoren hier natürlich keineswegs geleugnet werden: Die kulturelle Offenheit, die vielzähligen Kontakte zu anderen Hochkulturen, die Abwesenheit einer zentralen politischen Macht, die apollinische Religion, das Fehlen eines starken Berufspriestertums, die Existenz wohlhabender, ökonomisch (und politisch) freigestellter Aristokraten, etc., etc., das sind auch alles durchaus gewichtige Fakten, wenn man die Dynamik der griechischen Antike verstehen will.

Vorgriechische Mathematik

Obwohl die Entwicklung des Konzepts der *beweisenden* Mathematik durch die antiken Griechen eine *einmalige* Leistung war, so geschah dies dennoch nicht aus dem Nichts heraus, sondern unter Nutzung der insbesondere im ägyptischen wie babylonischen Kulturraum erbrachten Vorleistungen.

> Die Griechen selbst behaupten einstimmig, dass sie den Stoff zu ihrer Geometrie und Astronomie in Ägypten und Babylon gefunden haben. THALES und PYTHAGORAS, DEMOKRITOS und EUDOXOS, alle sollen sie nach Ägypten und Babylonien gereist sein. Selbst wenn man diese Reiseerzählungen nicht als historische Wahrheit nimmt, sondern nur als anekdotische Ausdrücke für die Tatsache, dass man orientalische Elemente in ihrer Lehre erkannte, so beweisen sie noch genug. Nur manche moderne Philologen wollen durchaus nicht gelten lassen, dass die Griechen irgend etwas Wesentliches aus dem Osten übernommen haben sollen. Als ob die Hellenen so beschränkt gewesen wären, das Wertvolle in fremden Kulturen nicht zu sehen und zu verwerten!
>
> Es ist gewiss kein Zufall, dass es gerade die Ionier sind, die zuerst die Fackel der griechischen Kultur vorangetragen haben. Sie wohnten ja am Rande der grossen orientalischen Reiche, waren sogar lange Zeit Untertanen der lydischen und persischen Könige; sie lebten in ständiger Berührung mit der Kultur des Orients.
>
> Wie eng Ionien und Kleinasien politisch und wirtschaftlich verbunden waren, wird jedem klar sein, der das erste Buch der Historien des Herodotos einmal flüchtig durchgesehen hat. Auch die Beziehungen zwischen Hellas und Ägypten liegen auf der Hand. Zahlreiche Griechen wohnten im Nildelta. Die griechische Stadt Naukratis, die unter PSAMMETICHOS (663 bis 609 v. Chr.) gegründet wurde, erhielt unter AMASIS (569 bis 525 v. Chr.) sogar ein Handelsmonopol für ganz Ägypten.[2]

Bevor wir uns hier der griechischen Mathematik zuwenden, soll ein kurzer Blick auf die ägyptische und babylonische Mathematik geworfen werden.

Die Substanz der ägyptischen wie babylonischen Mathematik wurde *nicht* in Form einer Sammlung von mathematischen Sätzen notiert, sondern als eine *Sammlung von mathematischen Prozeduren* gelehrt und tradiert. Diese Prozeduren wurden dabei typischerweise in Form von *Musterlösungen* für ausgesuchte Beispiele präsentiert.

Die ägyptische wie die babylonische Mathematik haben insofern eine gewisse Ähnlichkeit mit der Art und Weise, mit der wir bis heute Mathematik in der Primar- und Unterstufe unterrichten: Statt mathematischer Sätze und allgemeiner Formeln steht auch dort das *mustergültige* Beispiel und das daran orientierte Einüben von mathematischen Techniken (Prozeduren) im Mittelpunkt des Lernens. Es gibt sogar noch eine weitere Entsprechung: Die *Probe* als Mittel der Prüfung des gefundenen Resultats. Sowohl die ägyptische wie die babylonische Mathematik kennen diese Technik des Prüfens eines Ergebnisses.

Wenn im Folgenden ab und zu davon gesprochen wird, dass die ägyptische oder babylonische Mathematik schon diese oder jene *Formel*, bzw. schon diesen oder jenen *Satz* kannte, so ist dies nicht ganz wörtlich zu nehmen. Man lehrte dort i.a. keine Sätze und Formeln, sondern (fast ausschließlich) Musterlösungen. Aber man kann aus den angebotenen Musterlösungen der ägyptischen und babylonischen Mathematik die zugehörigen Formeln und Sätze meist einfach *herauslesen*. Solche fast anstrengungslos *herauslesbaren* Formeln und Sätze eröffnen dabei die Möglichkeit zu einer recht prägnanten Beschreibung des Niveaus der ägyptischen und babylonischen Mathematik.

2 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1: Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 133f

Frühe ägyptische Mathematik

Obwohl die griechische Mathematik der babylonischen Mathematik wahrscheinlich mehr zu verdanken hat als der ägyptischen, sahen die antiken Griechen dies genau anders herum. Dies mag auch damit zusammen hängen, dass man damals Ägypten, das Land mit den Pyramiden und den jährlichen Nil-Überschwemmungen, für das Ursprungs-Land der Geometrie hielt:

> Jeder aber, dem der Fluß von seinem Land etwas abgerissen, mußte es dem König gleich melden, der dann seine Beamten hinschickte, um nachzusehen und auszumessen, wieviel kleiner das Grundstück geworden, und die Höhe der davon künftig zu entrichtenden Abgabe zu bestimmen. Infolgedessen, glaube ich, hat man dort die Feldmeßkunst erfunden, und von da ist sie dann nach Griechenland gelangt. (Herodot: Historien, Buch II, 109)[3]

Wenn man heute die mathematischen Fertigkeiten der alten Ägypter vor 600 v.Chr. (vor den Anfängen der griechischen Mathematik) rekonstruiert, dann erfolgt dies auf der Grundlage weniger Dokumente, deren Inhalt aus dem Mittleren Reich (so ganz ungefähr: 2000 – 1800 v.Chr.) stammt. Die wichtigsten Quellen sind dabei der Papyrus Rhind und der Papyrus Moskau.

Die Träger des mathematischen Wissens der altägyptischen Kultur waren spezielle Beamte: die *Schreiber*. Die Fertigkeiten eines erfahrenen Schreibers gingen weit über das bloße Lesen und Schreiben hinaus. Die Schreiber mussten Dinge, wie den Materialbedarf für geplante Bauten oder den erforderlichen Proviant für ein Heer, berechnen können.

Die altägyptische Zahlschrift kennt Symbole für 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 und 1.000.000 . Das Symbol für 1.000.000 (Symbol „Gott“) war aber nicht in allen Phasen der altägyptischen Kultur gebräuchlich. Durch eine Reihung der Zahlsymbole konnten die natürlichen Zahlen (>0) dargestellt werden. Das Konzept dieser Zahlschrift entspricht im wesentlichen dem, was man als Mitteleuropäer von römischen Zahlen her kennt.

Mit Hilfe der altägyptischen Zahlschrift können auch Stammbrüche (Brüche der Form 1/n) dargestellt werden. Um den Stammbruch 1/k darzustellen, muss man die Darstellung der Zahl k um die Hieroglyphe „Mund“ ergänzen. Der *über* die Zahl k gesetzte „Mund“ verwandelt den Wert der Zahl von k in 1/k. Jenseits der Stammbrüche hatten die alten Ägypter nur noch für zwei Bruchwerte Zahlsymbole. Es waren Symbole für ⅔ und ¾.

Auch wenn sich die Rechenwege der alten Ägypter in mancherlei Hinsicht von den Techniken unterscheiden, die wir heute an Primarschulen lehren, so beherrschten die alten Ägypter doch alle vier Grundrechenarten einwandfrei.

War das Ergebnis einer Rechnung allerdings eine Bruchzahl, so konnte man gezwungen sein, das Ergebnis als *Summe darstellbarer* Bruchzahlen zu notieren. Statt 2/5 schrieb man z.B. 1/3 + 1/15. In der altägyptischen Zahlschrift gab es ja für einen Wert wie 2/5 keine direkte Darstellungsmöglichkeit. Man musste den Umweg über eine *Summe* zweier Stammbrüche wählen. Eine triviale Darstellung mittels Stammbrüchen à la 2/5 = 1/5 + 1/5 haben die alten Ägypter dabei konsequent vermieden. Der Papyrus Rhind, welcher unter anderem auch die wesentlichen Hilfsmittel zur Bruchrechnung der alten Ägypter an die Hand gibt, beginnt übrigens etwas großspurig:

> Der Papyrus fängt sehr vielversprechend an: „Kunstgerechtes Eindringen in alle Dinge, Erkenntnis alles Seienden, aller Geheimnisse …“ verspricht er zu lehren. Aber sehr bald stellt sich heraus, dass nicht der Urgrund der Dinge hier entschleiert werden soll, sondern dass es nur die Geheimnisse der Zahlen und der Bruchrechnung sind, in die der Adept hier eingeweiht werden soll, mit

3 Das Geschichtswerk des Herodot von Halikarnassos. Übersetzt von Theodor Braun. Frankfurt: Insel Taschenbuch 2001. S. 184

> Anwendungen auf vielerlei praktische Probleme, mit denen es die Beamten des grossen Reiches zu tun hatten: Verteilung von Lohnsummen an mehrere Arbeiter, Berechnung des Getreidebedarfs für die Zubereitung einer bestimmten Menge Brot oder Bier, Berechnung von Flächen und Rauminhalten, Umrechnung von Getreidemaßen usw. Dazwischen finden sich allerdings auch rein theoretische Aufgaben zur Einübung der schwierigen Technik der Bruchrechnung.[4]

Die Standard-Methode des Lehrens scheint im Vorrechnen von Beispielen bestanden zu haben. Häufig werden die erhaltenen Resultate durch eine Probe überprüft. Beschreiben wir die bei den Ägyptern bearbeiteten mathematischen Probleme mit modernem Vokabular, so ergibt sich hinsichtlich ihrer Kern-Kompetenzen etwa folgendes Bild:

- Lösung einfacher linearer Gleichungssysteme;
- Lösung einfachster quadratischer Gleichungen (z.B.: $\frac{3}{4} x^2 = 12$);
- Flächenberechnungen für Dreieck, Quadrat, Rechteck, Trapez;
- Sehr gute Näherung der Kreisfläche mittels $F = (8/9 * d)^2$ (entspricht einem angenommen Wert für π von ungefähr 3,16);
- Berechnung der Volumina von Würfel, Quader und Zylinder (Zylinder in sehr guter Näherung);
- Berechnung des Volumens des Stumpfes einer quadratischen Pyramide.

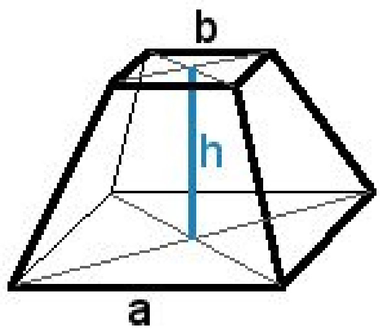


Abbildung 1: Quadratischer Pyramidenstumpf;

$V = h/3\ (a^2 + b^2 + ab)$

Dass die Ägypter die richtige Formel für das Volumen eines quadratischen Pyramidenstumpfes kannten, gilt allgemein als besonderes Highlight ihrer Mathematik. Ob sie auch die Formel für das Volumen der quadratischen Pyramide kannten, ist unklar. Wenn man mit heutigen Augen auf die Formel für den Pyramidenstumpf blickt, dann scheint sich die Formel $V = \frac{h}{3} a^2$ für die quadratische Pyramide regelrecht aufzudrängen, aber das muss nicht heißen, dass schon die alten Ägypter diese Formel kannten.

Außerdem: Obwohl die Ägypter wahrlich große Pyramidenbauer waren, verwendeten sie neben der korrekten Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfes hin und wieder auch Formeln, mit denen man das Volumen eines Pyramidenstumpfes nur grob nähern konnte.[5]

Zur nächsten Frage: Wussten die Ägypter, dass im rechtwinkligen Dreieck die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ gilt? Wussten sie, dass wenn $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, das Dreieck rechtwinklig ist? Diese Fragen lassen sich für die Zeit vor 600 v.Chr. nicht verbindlich beantworten. Wir finden in den Papyri keine entsprechenden Stellen. Die häufig geäußerte Vermutung, dass die Ägypter damals Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4, 5 benutzt haben, um rechte Winkel zu konstruieren, ist aber dennoch sehr plausibel. So richtig sicher ist es aber nicht.

> Fassen wir zusammen: Die altägyptische Kultur war hoch entwickelt. Die Mathematik hat in den Händen der Schreiber eine Höhe erreicht, die den praktischen Problemen gerecht werden konnte und in Einzelfällen zu weiteren Fragestellungen führte. Im Allgemeinen handelt es sich um Rechenanweisungen; die „Probe“ wird mit dem Ergebnis gemacht. Aber es gibt keine Begründung dafür, dass eine Vorschrift im Allgemeinen immer zum richtigen Ergebnis führt.[6]

4 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 25f
5 Siehe z.B.: C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Heidelberg New York: Springer Verlag 2003. S. 15
6 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 121

Frühe babylonische Mathematik

Das, was man heute gemeinhin babylonische Mathematik nennt, müsste eigentlich mesopotamische Mathematik heißen. Zu ihr haben mehrere mesopotamische Kulturen (und nicht nur die babylonische) wichtige Beiträge geliefert. Man rekonstruiert die babylonische (mesopotamische) Mathematik auf der Grundlage einer Vielzahl von mathematischen Texten auf Tontafeln. Der Großteil der Tontafeln stammt dabei aus der Zeit der *Hammurapi* Dynastie:

> The great majority of mathematical texts are "Old-Babylonian"; that is to say, they are contemporary with the Hammurapi dynasty, thus roughly belonging to the period from 1800 to 1600 B.C.[7]
>
> The mathematical texts can be classified into two major groups:"table texts" and "problem texts". A typical representative of the fist class is the multiplication table (...). The second class comprises a great variety of texts which are all more or less directly concerned with the formulation or solution of algebraic or geometrical problems.[8]

Die babylonische Zahlschrift verfügt über zwei als Zahlzeichen genutzte Keilschrift-symbole, und zwar für die 1 und die 10. Mit diesen beiden Zahlzeichen werden die Zahlen 1 bis 59 dargestellt. Diese Zahlen werden dann analog zu unseren Ziffern 0 - 9 in einem Stellenwertsystem interpretiert. Die Basis des Stellenwertsystems ist dabei nicht 10 (wie bei unserem modernen Dezimalsystem), sondern 60. Man spricht vom babylonischen Sexagesimalsystem. Ein System, das in seinen Kernpunkten auf die Sumerer zurückgeht.

Dass eine Stunde 60 Minuten und die Minute 60 Sekunden hat ist ebenso eine historische Spätwirkung des babylonischen Sexagesimalsystems, wie die Unterteilung von Grad in Minuten und Sekunden bei der Winkelmessung (bzw. den Angaben zur geografischen Länge und Breite eines Ortes).

In mathematik-historischen Arbeiten ist es üblich, Zahlen im Sexagesimalsystem mittels indisch-arabischer Ziffern darzustellen. Die Stellen des Sexagesimalsystems werden dabei dann z.B. durch Kommata getrennt und die Bruchstellen („Nachkommastellen“) durch ein Semikolon eingeleitet:

7,0,53;4,12 bedeutet dann z.B. $7 * 60^{2} + 0 * 60^{1} + 53 * 60^{0} + 4 * 60^{-1} + 12 * 60^{-2}$

Sexagesimal-Brüche (wie sie im Beispiel auftreten) waren im alten Babylon durchaus gebräuchlich. Eine vollwertige Null hingegen kannte man dort (anfänglich) nicht. Dies machte die Interpretation des Zahlenwerts natürlich fehleranfällig. Als Vorstufe zur Null wurde eine unbesetzte Stelle zunächst durch einen deutlichen Abstand zwischen den besetzten Stellen kenntlich gemacht. Dann wird (so etwa zu Beginn der Perserzeit) der Gebrauch eines *inneren Lückenzeichens* gebräuchlich. Es wird zwischen zwei besetzten Stellen eingefügt, wenn dazwischen eine Stelle unbesetzt ist (sprich einen Wert von 0 hat). Als letztes Zeichen einer Zahl wird das Lückenzeichen jedoch *nicht* verwendet. Damit bleiben alle natürlichen Zahlen, die auf eine 0 enden, weiterhin ein delikates Problem. Dieses Problem wird erst (viel später) durch die Einführung einer vollwertigen Null gelöst.[9]

Trotz der Schwäche der fehlenden Null ist das babylonische Sexagesimalsystem das beste Zahlensystem der Antike. Das Problem der etwas unsicheren Interpretation des Zahlenwerts kann meist entweder durch Verfolgung der einschlägigen Rechnungen oder durch Berücksichtigung des sonstigen Kontextes gelöst werden. Auf der Grundlage des Sexagesimalsystems entwickeln die Babylonier beeindruckende Fertigkeiten:

---

7 O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity. New York: Dover Publications, Inc. 1969. S. 29
8 O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity. New York: Dover Publications, Inc. 1969. S. 30
9 vgl. z.B.: Robert Kaplan: Die Geschichte der Null. München: Piper Verlag 2003

> Außer den vier Grundrechenarten kannten die Mesopotamier auch das Potenzieren und das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Es gibt Täfelchen mit den Quadrat- und Kubikzahlen aller Zahlen von 1 bis 60 – und damit umgekehrt auch der Quadrat- und Kubikwurzeln dieser Quadrat- und Kubikzahlen.[10]

Aber man war nicht auf so einfache Radikanden wie Quadrat- oder Kubikzahlen angewiesen. Den Wert der Quadratwurzel von 2 bestimmte man z.B. auf einen Wert, dessen (auf 7 Nachkommastellen genaue) dezimale Wiedergabe 1,4142128 lautet. Ein moderner Taschenrechner liefert 1,414213562. Der Fehler der Babylonier beträgt weniger als 0,001 Promille. Die guten Rechenfertigkeiten waren den Babyloniern bei der Lösung linearer Gleichungen, wie Gleichungen 2. und 3. Grades, sehr nützlich. Hier war die babylonische der ägyptischen Mathematik deutlich überlegen. Ergänzt wurden die Lösungsmethoden der Babylonier (wie bei den Ägyptern) durch das Konzept der Probe.

In der babylonischen Geometrie kennt man den Satz des Pythagoras sowie den Satz des Thales. In anderen Punkten bleibt die babylonische Geometrie aber hinter der ägyptischen zurück. Man kennt zwar auch bei den Babyloniern die Formeln zur Flächenberechnung von Dreieck, Rechteck und Trapez, aber die Kreisfläche wird recht grob genähert (Näherung entspricht $\pi = 3$). Und auch das Volumen des quadratischen Pyramidenstumpfes wird in den babylonischen Rechnungen stets nur grob genähert.[11]

Wie bei den Ägyptern liefern auch die babylonischen Lehrtexte Musterlösungen. Ein „*So ist die Prozedur*“ taucht häufiger als Schlussphrase bei babylonischen Musterlösungen auf. Die babylonischen Musterlösungen verfehlen in der Tat die Beschreibung allgemeiner Lösungswege im modernen Sinne nur äußerst knapp. O. Neugebauer besteht darauf, dass man den Babyloniern ein Denken in allgemeinen Prozeduren zubilligen muss:

> From actually computed examples it becomes obvious that it was the general procedure, not the numerical result, which was considered important. If accidentally a factor has the value 1 the multiplication by 1 will be explicitly performed, obviously because this step is necessary in the general case. Similarly we find regularly a general explanation of the procedure. Where we would write x + y the text would say "5 and 3, the sum of length and width". Indeed it is often possible to transform these examples directly into our symbolism simply by replacing the ideograms which were used for "length", "width", "add", "multiply" by our letters and symbols. The accompanying numbers are hardly more than a convenient guide to illustrate the underlying general process. Thus it is substantially incorrect if one denies the use of a "general formula" to Babylonian algebra.[12]

Die im 20. Jahrhundert von Neugebauer sehr energisch vertretene Position zur Neubewertung der babylonischen Mathematik hat sich mittlerweile durchgesetzt. Heute wird den Babyloniern ganz selbstverständlich ein Denken in allgemeinen Prozeduren zugebilligt:

> Die Form, in der die mathematischen Kenntnisse dargeboten werden, ist die der Rechenvorschrift, natürlich mit bestimmten Zahlen; jedoch sind sie meist so allgemein gehalten, daß beliebige Zahlen eingesetzt werden können. Man sieht das daran, daß gelegentlich eine Multiplikation mit 1 oder auch die Operation $\sqrt{1}=1$ ausdrücklich angegeben ist. Begründungen, Herleitungen oder Beweise finden sich in den Texten nicht. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß wir nicht wissen, was der Lehrer beim mündlichen Unterricht gesagt hat.[13]

10 André Pichot: Die Geburt der Wissenschaft. Parkland Verlag 2000. S. 65

11 Es gibt allerdings eine beschädigte Tontafel, die das Volumen des Pyramidenstumpfes behandelt und die man im Sinne der korrekten Lösung ergänzen könnte. Aber das ist natürlich deutlich weniger als die Ägypter vorzuweisen haben und zu wenig, um von der Kenntnis der korrekten Formel sprechen zu können.

12 O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity. New York: Dover Publications, Inc. 1969. S. 43f

13 Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 43

Prüfung und Begründung in ägyptischer und babylonischer Mathematik

Auf den vorherigen Seiten wurde ein grober Überblick zum Stand der frühen ägyptischen und babylonischen Mathematik gegeben. Die antiken Griechen konnten diese Techniken und dieses Wissen beim Aufbruch der griechischen Mathematik nutzen.

Obwohl wir bei der Rekonstruktion der frühen ägyptischen und babylonischen Mathematik mit allerlei Unsicherheiten leben müssen, kann man doch sagen, dass es keine Anzeichen dafür gibt, dass Ägypter und/oder Babylonier Mathematik in ähnlicher Weise als beweisende Wissenschaft verstanden haben, wie wir dies von der späteren griechischen Mathematik kennen.

Ägypter und Babylonier hatten jedoch keineswegs alle Elemente von Prüfung und Begründung strikt aus ihrer frühen Mathematik verbannt. Dass in beiden Kulturen die Probe ein gängiges Instrument zur Prüfung der Ergebnisse war, wurde bereits erwähnt.

Man kann eine *aufgehende* Probe dabei ja durchaus auch als Beweis deuten: Es wird bewiesen, dass die in der Probe eingesetzten Werte zur Lösungsmenge gehören. Wenn gefundene Werte konsequent per Probe überprüft werden, so sichert dies die Korrektheit der Ergebnisse genauso wie ein Beweis, der die verwendete Prozedur als zuverlässig ausweist.[14] Aus dieser Sicht ist eine Kultur der Probe durchaus ein kleiner Schritt in Richtung beweisender Mathematik. Aufgehende Proben sind „Richtigkeitsbeweise".

Eines der besten Beispiele für allererste kleine Schritte hin zu beweisender Mathematik liefert der ägyptische Papyrus Rhind. Der Papyrus enthält eine Tabelle, in der für ungerade ***n*** von 5 bis 101 zu jedem Wert ***2/n*** jeweils eine Zerlegung in eine Summe von Stammbrüchen angegeben wird.

> In der 2/n-Tabelle des Papyrus Rhind folgt jeder Zerlegung von 2/n in Stammbrüche ein „Richtigkeitsbeweis".[15]

Diese 2/n-Tabelle war für die altägyptische Art der Bruchrechnung von zentraler Bedeutung und da wollte man offensichtlich ganz auf Nummer sicher gehen.

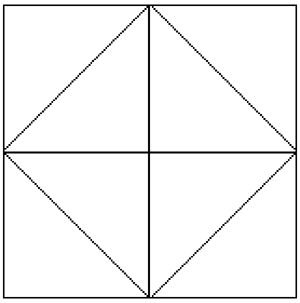


Abbildung 2: Altbabylonische Zeichnung

Einer der wenigen Hinweise, dass es noch weitergehende Ansätze zu einer beweisenden Mathematik gegeben haben *könnte*, liefert eine altbabylonische Zeichnung (siehe Abb. 2). Platon verwendet im Dialog *Menon* eine ähnliche Skizze. Dort dient sie dazu, einen Sklaven einsehen zu lassen, dass man ein doppelt so großes Quadrat erhält, wenn man über der Diagonale eines gegebenen Quadrats ein neues Quadrat errichtet.[16] Man kann dieses Resultat auch so ausdrücken, dass beim gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten ist. So erscheint es als ein Spezialfall des Satzes von Pythagoras. Haben die Babylonier an der Skizze den entsprechenden Satz abgelesen? Gab es bereits hier Anfänge eines anschaulichen Beweisens? Wir wissen es nicht.[17] Wir können es allerdings auch nicht ausschließen. Zur vollen Ausbildung einer Kultur der beweisenden Mathematik kam es (nach bisherigem Erkenntnisstand) auf jeden Fall erst bei den Griechen.

---

14 Wir nutzen diese Möglichkeit der Rechtfertigung durch eine Probe ja auch heute noch (und dies durchaus nicht nur in der Primarschule). Bei der Lösung von Integrationsproblemen ist es z.B. häufig am geschicktesten, sich durch etwas schmuddelige (aus theoretischer Sicht anzweifelbare) Rechnungen zu Vermutungen hinsichtlich der Stammfunktion „inspirieren" zu lassen und dann durch die *Probe der Differentiation* die Vermutungen zu beweisen. Wenn kein Programm zur maschinellen Lösung der Integrationsaufgabe zur Verfügung steht, ist dies häufig der schnellste Weg, um zu einer Lösung zu kommen. Die *Probe der Differentiation* trägt dabei die ganze Last der Rechtfertigung.

15 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 139

16 Vgl.: www.antike-griechische.de/Platon.pdf Abschnitt *Der Dialog Menon*, S. 44ff (Skizze auf S. 48).

17 Vgl.: Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 33

Die drei Hauptperioden der griechischen Mathematik

Man unterscheidet bei der griechischen Mathematik der Antike gern drei Hauptperioden:

- Die *ionische Periode: Thales*, *Pythagoras* und die *Pythagoreer* schaffen die Grundlagen der griechischen Mathematik. Es ist die Zeit, in der sich eine Kultur des Beweisens herausbildet. Anfänglich sind diese „Beweise“ noch eher anschauliche Begründungen für Sätze, denn Beweise im Sinne der modernen akademischen Mathematik. Die Anforderungen an die Strenge eines Beweises steigen aber bald deutlich an. Man beginnt dann auch schon, sich um einen systematischen Aufbau der Mathematik zu kümmern. *Archytas* von Tarent beschließt diese Periode.
- Die *athenische Periode: Eudoxos* und *Theaitetos* sind zwei prominente Vertreter dieser Periode. Ihre sehr anspruchsvollen Arbeiten dominieren die Mathematik der durch Platon mitgeprägten athenischen Periode.
- Die *hellenistische (alexandrinische) Periode* (ab ca. 300 v.Chr.): Euklid begründet die *alexandrinische Schule der Mathematik*. Sein systematisch geordnetes Werk *Die Elemente* fasst wichtige Ergebnisse aus der ionischen und athenischen Periode zusammen. Es steigt schnell zum Standardlehrtext der Mathematik auf.[18] Die hellenistischen Mathematiker *Archimedes*, *Appolonios*, *Hipparchos* und viele andere Größen der griechischen Antike bereichern die Mathematik dann später um neue und teils bahnbrechende Resultate.[19]

In diesem Papier geht es ausschließlich um die *ionische* und die *athenische* Periode. Von den mathematischen Texten aus dieser Zeit wurden nur wenige Fragmente bis in die Moderne überliefert. Man rekonstruiert diese Periode von 600 – 300 v.Chr. mit Hilfe von Texten, die häufig aus der griechischen Spätantike stammen.

Insbesondere die Geschichtsschreibung zur *ionischen* Periode hat dabei mit erheblichen Problemen zu kämpfen. Die schwierige Quellenlage soll an einem prominenten Beispiel, den für die Geschichtschreibung der Mathematik überaus wichtigen Euklid-Kommentaren von *Proklos* (412 – 485), kurz beleuchtet werden. Der neuplatonische Philosoph *Proklos* äußert sich dort auch zur Geschichte der griechischen Mathematik. Allerdings darf man dabei nie vergessen, dass er ca. *1.000 Jahre* nach den Anfängen der griechischen Mathematik lebte, also keinesfalls ein Zeitgenosse von *Thales* oder *Pythagoras* war. *Proklos* stützt seine Ausführungen auf die Schriften von *Eudemos*. Dieser Aristoteles-Schüler lebte im 4. Jahrhundert v.Chr. und hat (wohl auf Anregung von Aristoteles) wissenschaftshistorische Texte verfasst. Wahrscheinlich war er der erste Mathematik-Historiker. Seine Arbeiten sind (bis auf wenige Fragmente) verloren gegangen. *Proklos* lagen sie aber noch vor. Wir können also hoffen, dass *Proklos* uns den Wissensstand von *Eudemos* referiert. Aber selbst *Eudemos* lebte ja schon bereits deutlich nach *Thales* und *Pythagoras* und es ist schwer zu beurteilen, wie zuverlässig seine Schilderungen zur Geschichte der Mathematik waren. Die wenigen anderen (und teilweise konkurrierenden) Quellen, die uns jenseits der Proklos-Kommentare zur ionischen Periode der Mathematik zur Verfügung stehen, können leider nur selten einen Anspruch auf höhere Glaubwürdigkeit erheben.

Besonders zur *ionischen* Periode haben wir also nur sehr wenig Quellenmaterial und dies ist außerdem noch von einer nur schwer einschätzbaren Qualität. Beim Versuch, eine einigermaßen gehaltvolle Rekonstruktion der Anfänge der griechischen Mathematik anzubieten, kommt man also nicht umhin, erhebliche Risiken einzugehen. Der Leser sollte dies bei den folgenden Ausführungen nie vergessen und er sollte nicht zu verwundert sein, wenn er anderenorts eine leicht andere Version der Geschichte angeboten bekommt.[20]

---

18 Vgl.: *Euklid und die Elemente* unter www.antike-griechische.de/Euklid.pdf

19 Auf die hellenistische Periode folgt die Spätantike. In der Mathematik beschäftigt man sich dort vorwiegend mit der erläuternden Kommentierung der bereits vorliegenden Lehrtexte. Neue Resultate werden kaum noch erzielt.

20 Ergänzende Warnung: Bei der Wiedergabe des Inhalts antiker Mathematik benutze ich gänzlich schamlos moderne Notation. Ich hoffe, dass trotzdem niemand glaubt, dass damals das Σ bereits als Summenzeichen diente.

Thales von Milet: Der Erfinder des Faltungsbeweises?

Abbildung 3: Die ionische Siedlung Milet an der kleinasiatischen Küste

Die Geschichte der griechischen Mathematik lässt man für gewöhnlich mit Thales von Milet (ca. 625 – 547 v.Chr.) beginnen. Thales entstammte einer wohlhabenden Familie. Laut Herodot war er phönizischer Abstammung. Nach modernen Klassifikationen war Thales zugleich Mathematiker, Naturphilosoph, Astronom, Ingenieur, Politiker und Kaufmann. Neben seinem Beitrag zur Mathematik ist auch seine Begründung der *ionischen Naturphilosophie* ideengeschichtlich bedeutend. Praktisch jede Geschichte der westlichen Philosophie beginnt mit Thales. Er gilt gemeinhin als der erste vorsokratische Philosoph.[21] Daneben war er auch noch ein recht einflussreicher Politiker. Wegen seiner vielzähligen Talente und Verdienste wurde er schon in der Antike von den Griechen zu den *Sieben Weisen* gezählt.

Unter Wissenschaftshistorikern ist unstrittig, dass Thales bei der Einführung *ägyptischen* und *babylonischen* Wissens in die griechische Kultur eine wichtige Rolle zukommt. Welche und wieviele der ihm nachgesagten Reisen nach Ägypten und Babylonien er tatsächlich absolviert hat, ist dabei unerheblich. Er hat sich jedenfalls mit dem mathematischen und astronomischen Wissen dieser beiden alten Kulturen auseinander gesetzt. Er soll auch ein Verfahren ersonnen haben, mit dem man von der Küste aus bestimmen konnte, wie weit ein Schiff auf See entfernt ist. Außerdem wird Thales nachgesagt, dass er in der Lage war, die Höhe der Pyramiden an Hand ihres Schattens zu bestimmen. Ob und wie Thales diese beiden Leistungen erbracht hat, wird in der Literatur recht unterschiedlich diskutiert.[22]

Die beeindruckendste Geschichte zu Thales erzählt Herodot. Nach ihm hat Thales eine Sonnenfinsternis vorhergesagt (Herodot: Historien. Buch I, 74). Die Geschichte ist nicht ganz so unglaubwürdig, wie sie auf den ersten Blick klingt. Die babylonische Astronomie verfügte nämlich bereits damals über ein interessantes Wissen zu Sonnenfinsternissen. In moderner Sprechweise lässt es sich so charakterisieren: Die Babylonier kannten eine Regel mittels derer sich vorhersagen ließ, wann sich die Positionen von *Sonne - Mond - Erde* wieder so dicht an das Ideal der Lage auf einer gemeinsamen Gerade annähern werden, dass das Auftreten einer Sonnenfinsternis wahrscheinlich (möglich) wird.[23] Ob es allerdings zu diesem Termin an einem bestimmten Ort zur Verfinsterung am hellichten Tag kommen wird, konnten die Babylonier noch nicht vorhersagen. Vielleicht kannte Thales dieses babylonische Wissen, sagte mutig eine Sonnenfinsternis voraus und hatte dabei einfach noch ein wenig Glück (denn eine passende Sonnenfinsternis gab es damals).

Was hat Thales zur Entwicklung einer beweisenden Mathematik beigetragen? Wirklich sicher ist nichts. Aber Thales gilt als der Mann, der den Übergang von einer *Mathematik der Prozeduren* zu einer *Mathematik der Sätze* einleitete: (Statt *Prozeduren* zu tradieren wird das mathematische Wissen nun in *Sätzen* ausgedrückt und auch so gelehrt.) Es ist

21 Siehe hierzu: *Von Thales bis Heraklit* unter www.antike-griechische.de/Vorsokratik-1.pdf

22 Vgl. z.B. André Pichot: Die Geburt der Wissenschaft. Parkland Verlag 2000. S. 282ff und Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 71ff

23 Vgl. z.B. O. Neugebauer: The Exact Sciences in Antiquity. New York: Dover Publications, Inc. 1969. S. 109 und Thomas Heath: Aristarchus of Samos. Elibron Classics 2007. S. 12ff

zudem gut *möglich*, dass Thales *einfache Faltungsbeweise* eingeführt hat. Nach einer etwas riskanten Lesart antiker Quellen kommen hierfür folgende Sätze in Frage:

- (a) Der Durchmesser halbiert den Kreis;
- (b) Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck stimmen überein;
- (c) Die von zwei Geraden erzeugten Scheitelwinkel stimmen überein.
- (d) Die Diagonalen im Rechteck besitzen die gleiche Länge und halbieren einander.

In allen vier Fällen kann man die geometrische Behauptung dadurch „beweisen“, dass man eine Figur entlang von Symmetrie-Achsen faltet und so jeweils die Übereinstimmung von zwei Teilen zeigt. Dies erscheint als ein derart einfacher erster Schritt in Richtung Beweiskultur, dass es schwierig ist, sich noch einfachere Vorstufen vorzustellen.

Darüber hinaus wird vor dem Hintergrund (ebenfalls riskanter Interpretationen) anderer antiker Textstellen diskutiert, ob Thales „bewiesen“ hat, dass

- (e) ein Dreieck bestimmt ist, wenn Basis und die beiden Basiswinkel gegeben sind;

Auch dieser Satz kann durch eine einfache, an die Anschauung appellierende Demonstration gestützt und damit in einem *schwachen* Sinne „bewiesen“ werden.

Mit der Unterstellung, dass Thales die Sätze (a) – (e) in einem (nicht allzu strengem Sinne) bewiesen hat, mutet man der Ideengeschichte keine gänzlich unrealistisch erscheinenden, plötzlichen Sprünge zu.

Man kann sich allerdings die Frage stellen, ob es wirklich glaubwürdig ist, dass das Beweisen bei derart einfachen Sätzen seinen Anfang genommen haben soll. Wenn es *noch keine* eingeführte Kultur der Begründung mathematischer Sätze gab, ist es dann plausibel anzunehmen, dass als erstes Sätze bewiesen wurden, bei denen man sich derart anstrengen muss, um sich vorzustellen, wie einem antiken Denker hier Zweifel gekommen sein sollen? Und wozu sollte ein Beweis denn schließlich gut sein, wenn nicht dazu, um auftauchende Zweifel an der Geltung einer Behauptung auszuräumen?[24]

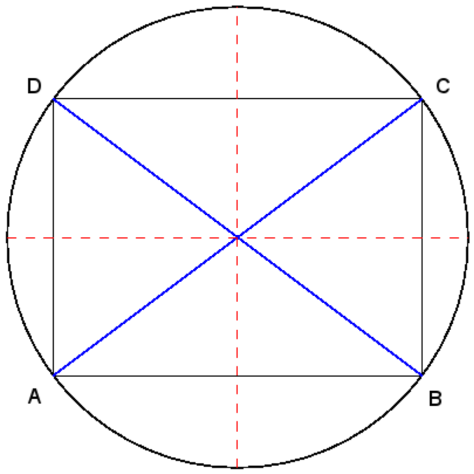


Abbildung 4: Zu jedem einem Halbkreis einbeschriebenen Dreieck BCD lässt sich ein Rechteck ABCD konstruieren, das den Durchmesser BD als Diagonale besitzt. Ein solches Dreieck BCD ist deswegen stets rechtwinklig.

Das ganze Bild ändert sich, wenn man den nach Thales benannten Satz hinzunimmt:

> Das einem Halbkreis einbeschriebene Dreieck ist stets rechtwinklig (*Satz von Thales*).

Dieser Satz konnte leicht aus der prozeduralen babylonischen Mathematik gewonnen werden und er war sicherlich anspruchsvoll genug, um die Frage aufkommen zu lassen, ob das denn wirklich immer gilt. Hat Thales diesen nach ihm benannten Satz also nicht nur in die griechische Kultur eingeführt, sondern auch (in einem wie schwachen Sinne auch immer) bewiesen, begründet, plausibel gemacht? Wir haben keine Quellen, die ein eindeutiges und unmissverständliches „Ja“ zu dieser Frage rechtfertigen würden, aber es gibt einige Überlegungen, die dies als durchaus möglich und keineswegs ganz unplausibel erscheinen lassen.

Die Abb. 4 zeigt eine einfache Skizze zur anschaulichen Begründung des Satzes von Thales. Auch die anderen im Zusammenhang mit Thales genannten Sätze lassen sich beinahe alle mit dieser Skizze in Verbindung bringen. Die oben aufgeführten Sätze (a) – (d) erscheinen nun als nützliche Hilfssätze zur „Herleitung“ des *Satzes von Thales* und/oder als ein Nebenprodukt aus dieser Skizze.

24 Eine etwas provokante, hier jedoch nicht weiter verfolgte Alternative: Das „Beweisen“ begann seine Karriere als *didaktisches Hilfsmittel* für den „Erwachsenen-Unterricht“. Sachverhalte sollten so erläutert und leichter begreiflich gemacht werden. Das *Sichern der Geltung* von Behauptungen war *anfangs* überhaupt *nicht* das primäre Ziel.

Wir haben *keinerlei direkten* Anhaltspunkt dafür, dass Thales den nach ihm benannten Satz mit Hilfe einer derartigen Skizze „bewiesen“ hat. Vielleicht hat er ihn ja überhaupt nicht bewiesen, sondern nur (als Übernahme aus der babylonischen Mathematik) in den griechischen Kulturraum eingeführt. Vielleicht hat Thales sogar im Ganzen überhaupt nichts bewiesen. Aber es sortiert sich doch einiges auffallend natürlich, wenn man unterstellt, dass Thales eine Skizze ähnlich der in Abbildung 4 zur Begründung des *Satzes von Thales* herangezogen hat. Diverse Mitteilungen antiker Autoren ließen sich so als ein etwas undeutliches Echo des Durcharbeitens der Beweis-Skizze durch Thales deuten:

> An dieser Figur lassen sich fast alle mit dem Namen von Thales in Verbindung gebrachten Aussagen demonstrieren.[25]

Solche Skizzen gelten heute (in der akademischen Mathematik) nicht mehr als Beweis. Aber damals hätte so etwas doch als ein durchaus produktiver erster Ansatz zur Entwicklung einer Beweiskultur fungieren können. Aber alles reine Spekulation! Allerdings eine Spekulation, die so viel suggestive Elemente enthält, dass sie in mathematik-historischen Betrachtungen immer wieder auftaucht. Und dies, obwohl wir *keinerlei direkte* Anhaltspunkte für die Verwendung einer derartigen (oder ähnlichen) Skizze haben.

Auch wenn sich der Beitrag, den Thales zur Entwicklung der *beweisenden* Mathematik geleistet hat, nicht mehr genau bestimmen lässt, so kann man doch bereits bei Thales die Frage stellen, wieso sich die Griechen nicht einfach mit der *prozeduralen* Mathematik der Ägypter und Babylonier zufrieden gaben, sondern zusätzlich nach Beweisen verlangten.

Vorweg: Alles Folgende ist extrem spekulativ. Es ist nicht anzunehmen, dass die Ägypter und/oder Babylonier ihre Art der Mathematik als defizitär empfunden haben. Sie werden wohl kaum vor ihren Prozeduren gesessen und darüber sinniert haben, wie man das Ganze jetzt auch noch beweisen könne. *Die Griechen beseitigten mit der Einführung des Beweises einen Mangel, den vorher niemand so richtig empfunden hatte*.

Warum sollte man eigentlich auch erwarten, dass man zur Prozedur, die das erforderliche Baumaterial zur Errichtung eines Pyramidenstumpfes bestimmt, irgendeine Art von Beweis erhalten kann, wohingegen man die Prozedur zum Kochen eines Hühnereis besser einfach gänzlich beweisfrei hinnimmt und schlichtweg nur anwendet.

Es lässt sich *vermuten*, dass die Einführung des Beweises eng damit zusammen hängt, dass das ägyptische und babylonische Wissen nicht langsam in den griechischen Kulturraum eingesickert ist, sondern von wenigen, höchst aufgeschlossenen Gelehrten binnen kurzer Zeit gezielt und bewusst in den griechischen Kulturraum eingeführt wurde. Wer als Erwachsener mit Wissen und Traditionen eines fremden Kulturkreises konfrontiert wird, der wird sich prüfender und kritischer verhalten, als jemand, der als Kind in die entsprechende Kultur hineingewachsen ist. Dies natürlich umso mehr, wenn verschiedene neu bekannt gewordene Methoden anderer Kulturen untereinander im Widerstreit stehen, bzw. sich in Konkurrenz zu Traditionen der eigenen Kultur befinden.

Dass man nicht jeder Behauptung glauben schenken darf und dass man in Zweifelsfällen besser nach Beweisen fragt, kannte man auch in der Antike schon von Gerichtsverfahren. Dass die Griechen bei der Prüfung der Wissensschätze fremder Kulturen dann eine Art des Beweisens gefunden haben, die um so vieles strenger ist, als der Beweis vor Gericht, kann als gleichermaßen segensreicher wie in den Details unerklärlicher Glücksfall der Geschichte gelten. Dass der mathematische Beweis mit seinem Aha-Effekt eine neue Art der Einsicht liefert und eine neue Art des Lernens wie Lehrens ermöglicht, hat auf die griechische Gelehrtenwelt offensichtlich so großen Eindruck gemacht, dass man diesen neu gefundenen Zugang zu Wissen immer weiter kultiviert hat. Und so wurde dann die beweisende Mathematik bis zu jener Reife entwickelt, die wir von Euklids Elementen kennen.

25 C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Heidelberg, New York: Springer Verlag 2003. S. 33.
Zur detaillierten mathematik-historischen Diskussion des *Satzes von Thales* siehe auch: Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 135ff

Pythagoras und sein Satz

Abbildung 5: Pythagoras wurde auf der ionischen Insel Samos geboren, übersiedelte nach Kroton (Unteritalien) und gründete dort den Bund der Pythagoreer. Er starb in Metapont.

> Pythagoras, etwa 570 in Samos geboren, verließ seine Vaterstadt, angeblich, weil er die unter der Tyrannis von Polykrates herrschenden politischen Verhältnisse mißbilligte (..). (…) Manche Anzeichen sprechen dafür, daß Pythagoras die Interessen des landbesitzenden Adels (dem er nicht angehörte) vertrat, insbesondere nachdem er sich in Kroton niedergelassen und dort Einfluß gewonnen hatte. (..) Ein gegen die Pythagoreer gerichteter Aufstand zwang aller Wahrscheinlichkeit nach Pythagoras gegen Ende seines Lebens zur Flucht aus Kroton. Er wandte sich nach dem nahen Metapont, wo er um 500 starb.[26]

Um das Leben von Pythagoras (ca. 570 – 500 v.Chr.) rankt sich eine Vielzahl von Legenden. Deswegen ist es häufig recht schwer, zur historischen Wahrheit vorzudringen. Das Erkennen von legendenhaften Ausschmückungen gestaltet sich nicht immer so einfach wie bei der Suche nach der historischen Wahrheit zu seinem Vater:

> Manche halten ihn [Pythagoras; NF] für den Sohn eines vermögenden Bürgers namens Mnesarchos, andere für den Sohn des Gottes Apollo; ich überlasse dem Leser die Wahl.[27]

Es wird gern die Geschichte erzählt, dass der junge Pythagoras noch den alten Thales getroffen hat. Eine solche Stab-Übergabe zwischen zwei Geistes-Heroen der griechischen Antike hätte natürlich ihren Charme, allein es fehlen hierzu belastbare Quellen. Das heißt nun allerdings auch nicht, dass sich die beiden bestimmt nicht begegnet sind. Milet und Samos sind eng benachbart und Thales war berühmt. Dass ein wacher, vielseitig interessierter und intelligenter Mann wie der junge Pythagoras die Nähe des hoch angesehenen Thales suchte, ist nicht gerade unplausibel, aber wir wissen es nicht.

Auf jeden Fall werden Pythagoras (wie Thales) umfangreiche Reisen in den ägyptischen und auch mesopotamischen Kulturraum nachgesagt. Wie Thales taucht Pythagoras nicht nur in der Geschichte der griechischen Mathematik auf, sondern er spielt auch in der Philosophie-Geschichte eine wichtige Rolle. Ja, das Wort „Philosophie“ (*Freund der Weisheit*) geht nach einigen Quellen auf Pythagoras zurück. Wie bei Thales, so haben wir auch bei Pythagoras keine überlieferten Schriften.

Während Thales als Begründer der *ionischen Naturphilosophie* gilt, hat Pythagoras die *Pythagoreer* gegründet, einen religiösen Bund mit dem Motto *Alles ist Zahl*.[28] Ein wichtiger Hintergrund für dieses Motto ist die pythagoreische Harmonielehre. Die harmonischen Intervalle werden hier *erstmals* als Ausdruck ganzzahliger Zahlverhältnisse interpretiert:

Oktave = 1 : 2 (bzw. 2 : 1) ; Quinte = 2 : 3 (bzw. 3 : 2); Quarte 3 : 4 (bzw. 4 : 3).

Wie die den harmonischen Intervallen unterliegenden Frequenzverhältnisse in der Antike entdeckt wurden, wird bis heute kontrovers diskutiert.

---

26 Wolfgang Röd: Geschichte der Philosophie. Bd. I. München: Beck`sche Verlagsbuchhandlung 1976. S. 50f
27 Bertrand Russell: Philosophie des Abendlandes. Wien: Europa Verlag 1992, 6. Auflage. S. 51
28 Zu *Alles ist Zahl* und der Rolle von Pythagoras und den Pythagoreern als Teil der Vorsokratik siehe auch: *Von Thales bis Heraklit* unter www.antike-griechische.de/Vorsokratik-1.pdf

Die hier spannendste Frage ist natürlich: Hat Pythagoras den nach ihm benannten Satz bewiesen? Es gibt mehrere antike Quellen, die genau dies behaupten und dabei manchmal sogar noch die Opfer beschreiben, die Pythagoras zur Feier des Ereignisses darbrachte. Aber sind diese Quellen glaubwürdig? Hierzu werden gerne Zweifel angemeldet:

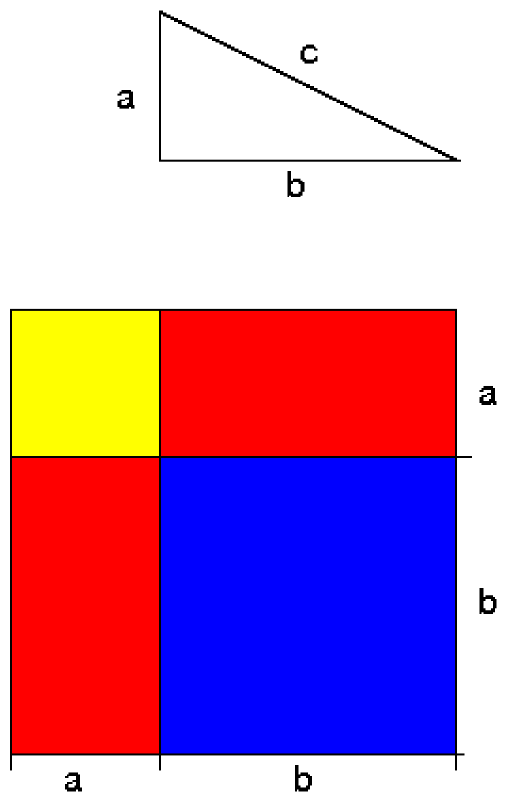


Abbildung 6: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

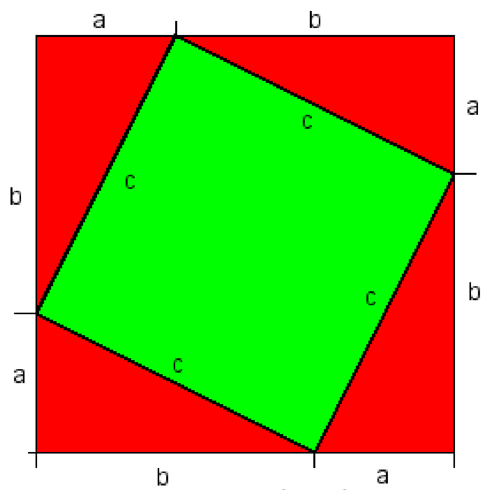


Abbildung 7: $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$

> Tatsächlich sind unsere Kenntnisse von Pythagoras so wenig gesichert, daß es buchstäblich unmöglich ist, seine Ideen von denen seiner Anhänger abzugrenzen. Wie bereits erwähnt, hat er nichts Schriftliches hinterlassen, weshalb wir uns auf die Werke der Pythagoreer und späterer Autoren verlassen müssen. Bei den Pythagoreern war es jedoch üblich, alle Entdeckungen dem Meister zuzuschreiben, so daß ihre Auskünfte nur begrenzt hilfreich sind.[29]

Oder direkt zu $a^2 + b^2 = c^2$:

> Though this is the proposition universally associated by tradition with the name Pythagoras, no really trustworthy evidence exists that it was actually discovered by him.[30]

Man kann also *nicht sicher* sein, dass Pythagoras „seinen“ Satz bewiesen hat. Obwohl die Quellen dazu *anzweifelbar* sind, ist es aber natürlich trotzdem vernünftig, ernsthaft die *Möglichkeit* zu erwägen, dass Pythagoras „seinen“ Satz bewiesen hat.

Wenn Pythagoras „sein“ $a^2 + b^2 = c^2$ bewiesen hat, dann aber sicherlich nicht mit dem Beweis, den uns Euklid zu diesem Theorem vorführt (Buch I, Satz 47 der *Elemente*). Euklids Beweis zeigt bereits alle Merkmale einer *ausgereiften Beweiskultur* und gilt zurecht als anspruchsvoll. Wenn man einen Beweis sucht, den man Pythagoras zutraut, dann sollte man nach einem einfacheren Beweis Ausschau halten.

Und tatsächlich gibt es auch sehr einfache Beweise zum *Satz des Pythagoras*:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten ***a*** und ***b*** wie der Hypotenuse ***c***. Betrachtet man jetzt ein Quadrat mit der Basis (a + b) so gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ (siehe Abb. 6).}$$

Andererseits kann man aus Abb. 7 ablesen:

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab$$

Also: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, und daraus folgt unmittelbar: $a^2 + b^2 = c^2$.

Hat Pythagoras damals, mit einem derartigen Beweis, auf dem Niveau der heutigen Mittelstufen-Mathematik, die beweisende Mathematik entscheidend vorangebracht? Sicher ist das natürlich nicht, sondern nur eine Spekulation. Allerdings eine Spekulation, die *keineswegs* so unplausibel ist, wie uns dies einige Autoren gerne weismachen wollen.[31]

29 Paul Strathern: Pythagoras & sein Satz. Frankfurt/M:Fischer Taschenbuch Verlag 1999. S. 36
30 Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 144
31 Als hierzu einschlägiges (sehr prominentes) Negativbeispiel siehe: Walter Burkert: Weisheit und Wissenschaft. Nürnberg: Verlag Hans Carl 1962. S. 405ff

Die Pythagoreer: Ein religiöser Bund mit Beweiskultur

Die von Pythagoras in Kroton gegründete religiöse Bewegung der Pythagoreer errang in mehreren Orten Unteritaliens großen politischen Einfluss. Man lebte in ordensähnlichen Gemeinschaften und achtete auf vegetarische Ernährung. Das Zeichen des Bundes war das Pentagramm, das philosophische Motto lautete *Alles ist Zahl*.

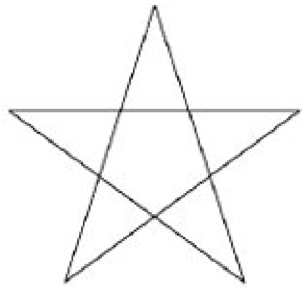


Abbildung 8: Erkennungssymbol der Pythagoreer: Das Pentagramm

> Die pythagoreischen Bünde (Hetärien), von denen sich nicht sagen lässt, ob sie auch unter einander eine organisatorische Einheit bildeten, waren hierachisch gegliederte Gemeinschaften, möglicherweise auf kommunistischer Basis [Es gibt Hinweise darauf, dass beim Eintritt in den Bund Eigentum zu Gemeinschaftseigentum wurde; NF](...). Ihr Zusammenhalt beruhte auf gemeinsamen praktischen Zielsetzungen wie der Aufgabe der Bewahrung bzw. Vermehrung des in der Sekte tradierten, auf Pythagoras zurückgeführten religiös-philosophischen Wissens. Bemerkenswert ist, daß die pythagoreischen Hetärien auch Frauen offen standen.[32]

Die religiösen Vorschriften des Bundes hören sich in modernen Ohren recht seltsam an.

1. Sich der Bohnen enthalten.
2. Nicht aufheben, was zu Boden gefallen.
3. Keinen weißen Hahn anrühren.
4. Brot nicht zu brechen.
5. Über kein Querholz zu treten.
6. Das Feuer nicht mit Eisen zu schüren.
7. Nicht von einem ganzen Laib zu essen.
8. Keinen Kranz zu zerreißen.
9. Nicht auf einem Viertelmaße zu sitzen.
10. Nicht das Herz zu essen.
11. Nicht auf Landstraßen zu gehen.
12. Keine Schwalben unter seinem Dache zu dulden.
13. Die Spur des Topfes nicht in der Asche zu lassen, wenn er herausgenommen wird, sondern die Asche durcheinanderzurühren.
14. Sieh nicht neben einem Lichte in einen Spiegel.
15. Wenn du dich aus dem Bettzeug erhebst, rolle dieses zusammen und glätte den Eindruck deines Körpers aus.[33]

So erstaunlich es klingt: Eine religiöse Sekte mit einer derart absonderlichen Liste von Ge- und Verboten spielte eine wichtige Rolle in der griechischen Mathematik. Die Pythagoreer glaubten an Seelenwanderung und *wissenschaftliche Bemühungen* galten ihnen dabei als ein Mittel, um dem leidvollen Kreislauf der Wiedergeburten zu entkommen: Mathematische Forschung zwecks Rettung des Seelenheils!

> Die Seele durchläuft dieser Lehre zufolge eine Reihe von Verkörperungen, bis es ihr gelingt, sich von allen Einflüssen der Körperlichkeit zu lösen, d.h. den Kreislauf der Geburten (...) zu durchbrechen und in die Region des Göttlichen zurückzukehren. Über das Schicksal der Seele entscheidet die Art der Lebensführung. Die Seele des moralisch Höherstehenden wird in einer höheren Daseinsform wieder geboren; die Seele des moralisch Minderwertigen steigt zu niederen Daseinsformen ab. Die Reinigung der Seele, die die Erlösung aus dem Kreis der Wiedergeburt sichern soll, erfolgt durch eine asketische Lebensweise und durch wissenschaftliche Bemühungen.[34]

---

32 Wolfgang Röd: Geschichte der Philosophie. Bd. I. München: Beck`sche Verlagsbuchhandlung 1976. S. 51f
33 Zitiert nach: Bertrand Russell: Philosophie des Abendlandes. Wien: Europa Verlag 1992, 6. Auflage. S. 53
34 Wolfgang Röd: Geschichte der Philosophie. Bd. I. München: Beck`sche Verlagsbuchhandlung 1976. S. 54

Die politisch einflussreichen Gemeinschaften der Pythagoreer koalierten gern mit der lokalen Aristokratie, was sie den Anhängern der Demokratie verhasst machte. Mitte des 5. Jahrhunderts (v.Chr.) kommt es in Unteritalien zu anti-pythagoreischen Unruhen. Mit Ausnahme der Stadt Tarent werden dabei überall die pythagoreischen Gemeinschaften aufgelöst und die Pythagoreer vertrieben. In *Tarent* hingegen kann noch im 4. Jahrhundert (v.Chr.) der Pythagoreer Archytas zum angesehenen Politiker aufsteigen.

Die aus Unteritalien vertriebenen Pythagoreer übersiedeln meist ins griechische Kernland und sorgen dort für eine Verbreitung pythagoreischen Gedankenguts. Ein weiterer Faktor zur Verbreitung pythagoreischen Denkens: Der in Unteritalien lebende Pythagoreer Archytas von Tarent schließt mit dem Athener Philosophen Platon Gastfreundschaft. Die pythagoreischen Einflüsse, die in Platons Philosophie erkennbar sind, dürften eng mit dieser Gastfreundschaft zusammenhängen.

Der Pythagoreismus als bedeutende Bruderschaft und geistige Bewegung erlosch etwa zur Zeit des Aristoteles.[35] Im 1. Jahrhundert (v.Chr.) versucht man jedoch diese Tradition wiederzubeleben. Es entsteht der Neupythagoreismus, der allerdings hier kein Thema ist.

Wir wissen über das Innenleben des Bunds der Pythagoreer nicht viel[36], doch es ist (fast) unstrittig, dass sich *einige* der Pythagoreer intensiv mit Mathematik beschäftigten und diese auch *beweisend* betrieben. Der Bund der Pythagoreer war also eine wichtige Kinderstube für die *beweisende Mathematik*, ein Schutzraum, in dem sich eine später allgemein akzeptierte Beweiskultur zunächst einmal langsam entwickeln konnte.

Falls weder Thales noch Pythagoras den Beweis in die griechische Mathematik einführten (etwas was ja durchaus möglich erscheint), dann liegt die Vermutung nahe, dass es ein (uns namentlich nicht bekannter) Pythagoreer war, dem wir den ersten Schritt hin zu beweisender Mathematik zu verdanken haben.

Die pythagoreische Beschäftigung mit der Mathematik wurde stark durch ihre Harmonielehre und das Motto *Alles ist Zahl* geprägt. Neben der Geometrie spielten auch die Untersuchungen besonderer Zahlenverhältnisse (Proportionen) eine wichtige Rolle. Solche Begriffe wie *harmonische Proportion* oder *geometrische Proportion* entstammen der pythagoreischen Tradition der Mathematik.

Die Beschäftigung mit Zahlen hat bei den Pythagoreern aber auch schnell mal einen Einschlag ins Zahlenmystische. So galt ihnen die 10 als eine ganz besondere Zahl. Auch *vollkommenen Zahlen* wie *Freundschaftszahlen*[37] maßen sie eine außermathematische Bedeutung bei. Trotz dieser Anfälligkeiten für magisches Denken, es waren die Pythagoreer, die den Großteil der griechischen Zahlentheorie geschaffen haben. Euklid vermittelt uns in den Büchern VII bis IX seiner Elemente einen Eindruck vom Stand dieser (vorwiegend von Pythagoreern geschaffenen) griechischen Zahlentheorie.

Harte Kontraste waren typisch für die Pythagoreer: Einerseits naive Zahlenmystik – andererseits eine entwickelte Zahlentheorie. So haben sie zwar einerseits die beweisende Mathematik gepflegt (und damit das zwingende Argument als höchste Autorität gewürdigt), aber andererseits konnte man in einer Diskussion seine Thesen auch mit einem schlichten *„ER selbst hat es gesagt“* untermauern. (Mit *ER* war dabei natürlich Pythagoras gemeint.)

35 Einzelne (mathematisch inaktive) Pythagoreer scheint es aber auch in hellenistischer Zeit noch gegeben zu haben.

36 Wie wenig Zuverlässiges wir über die Pythagoreer wissen, zeigt sich z.B. an den noch immer geführten Debatten zu den Begriffen „Akusmatiker“ und „Mathematiker“. Wir kennen diese Bezeichnungen aus antiken Textstellen zum pythagoreischen Bund. Es ist aber bis heute strittig, ob mit diesen Begriffen unterschiedliche Hierachiestufen der pythagoreischen Ordensstruktur, verschiedene geistige Strömungen innerhalb des Bundes oder konkurrierende Bewegungen nach dem Auseinanderfallen des Bundes bezeichnet wurden. Sicher scheint dabei nur, dass man die Freunde des Beweisens jeweils eher bei den „Mathematikern“ zu suchen hat.
Unser geringer Kenntnisstand zu den Pythagoreern scheint dabei von diesen durchaus gewollt gewesen zu sein. Man verstand sich als ein Bund, der großen Wert darauf legte, seine Geheimnisse zu bewahren.

37 Eine Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler ist. Zwei Zahlen heißen *Freundschafts-zahlen,* wenn die Summe der Teiler der einen Zahl jeweils die andere ergibt. (Die 1 gilt hierbei stets als Teiler.)

Figürliches und andere Besonderheiten beim Umgang mit Zahlen

Das Verhältnis, das die Pythagoreer im 6. und 5. Jahrhundert (v.Chr.) zu Zahlen hatten, unterscheidet sich in vielerlei Hinsicht von unserem heutigen. Sie fanden damals noch *Gerechtigkeit*, *Seele* und *Vernunft* in der Welt der Zahlen. Aristoteles schreibt:

> Während dieser Zeit und schon vorher befaßten sich die sogenannten Pythagoreer mit der Mathematik und brachten sie zuerst weiter, und darin eingelebt hielten sie deren Prinzipien für die Prinzipien alles Seienden. Da nämlich die Zahlen in der Mathematik der Natur nach das Erste sind, und sie in den Zahlen viele Ähnlichkeiten (Gleichnisse) zu sehen glaubten mit dem, was ist und entsteht, mehr als in Feuer, Erde und Wasser, wonach ihnen (z.B.) die eine Bestimmtheit der Zahlen Gerechtigkeit sei, eine andere Seele oder Vernunft, wieder eine andere Reife und so in gleicher Weise so gut wie jedes einzelne, und sie ferner die Bestimmungen und Verhältnisse der Harmonien in Zahlen fanden; – da ihnen also das übrige seiner ganzen Natur nach den Zahlen zu gleichen schien, die Zahlen aber sich als das Erste in der gesamten Natur zeigten, so nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seien Elemente alles Seienden und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.
> (Aristoteles: Metaphysik. Buch I, Kap. 5, 985b)[38]

Wir werden uns hier nur mit den deutlich banaleren Aspekten der Zahlen beschäftigen. Auch dazu haben die Pythagoreer vieles beigetragen.

Wenn hier von Zahlen die Rede ist, so geht es um *natürliche Zahlen*. Die *Eins* gehört dabei aber nicht dazu. Das Zählen begannen die Pythagoreer einerseits ganz selbstverständlich mit der *Eins*, anderseits war die *Eins* für sie *keine* richtige Zahl. *Eins* und *Einheit* waren bei ihnen zwei eng verwobene und kaum getrennte Begriffe. Die Wahl der *Einheit* bestimmt, wonach oder was gezählt wird. Das Zählen ist aber etwas anderes als die Wahl der Einheit. Da die *Wahl der Einheit* aber auch so ausgedrückt werden kann, dass man *bestimmt was als Eins gilt*, so schien den Pythagoreern die *Eins* keine Zahl wie andere zu sein.

Mehr noch: Für die Pythagoreer ist die *Eins* zugleich *gerade* wie *ungerade* und eine Fundamentalgröße der Zahlen wie des Himmels:

> Als Elemente der Zahl aber betrachteten sie das Gerade und das Ungerade, von denen das eine begrenzt sei, das andere unbegrenzt, das Eine aber bestehe aus diesem beiden (denn es sei sowohl gerade als ungerade) die Zahl aber aus dem Einen, und aus Zahlen, wie gesagt, bestehe der ganze Himmel.
> (Aristoteles: Metaphysik. Buch I, Kap. 5, 986a)[39]

Diesen ganzen philosophisch aufgeplusterten Ballast zu den *Zahlen* im allgemeinem und dem *Einem* im besonderen kann man (zum Glück!) praktisch vollständig ignorieren, wenn man sich den mathematischen Teilen der pythagoreischen Zahlentheorie nähert. Selbst dass die *Eins* nicht als eine natürliche Zahl wie andere gilt, spielt dort kaum eine Rolle.

Für die mathematische Praxis ergibt sich aus all dem eigentlich nur ein einziger wichtiger Punkt: *Die Pythagoreer meiden die Bruchrechnung*. Sie haben eine heilige Scheu davor, die *Eins* zu zerteilen. Der Philosoph Platon schließt sich der entschiedenen Ablehnung der Bruchrechnung durch die Pythagoreer vorbehaltlos an. Er lässt die Figur SOKRATES, die er im hier einschlägigen Dialog *Der Staat* als Sprachrohr benutzt, folgendes ausführen:

> Denn du weißt ja, wie es die geschulten Mathematiker machen: wenn einer versucht die reine Eins in Gedanken zu zerteilen, so lachen sie ihn aus und weisen ihn ab, und wenn du sie zerstückelst, so antworten sie mit Vervielfältigung derselben, immer darauf bedacht zu verhüten, daß die Eins

38 Aristoteles: Philosophische Schriften. Bd 5. Übersetzt von Hermann Bonitz. Hamburg: Meiner Verlag 1995. S. 14f
39 Aristoteles: Philosophische Schriften. Bd 5. Übersetzt von Hermann Bonitz. Hamburg: Meiner Verlag 1995. S. 15f

> sich jemals auch als etwas zeigen könnte, das nicht Eines, sondern eine Vielheit von Teilen wäre. (Platon: Der Staat. Buch VII, 525)[40]

Ob nun in Folge des auch von Platon unterstützten Diktums der Pythagoreer oder aus anderen Gründen: Das mathematische Standardwerk der Antike, die *Elemente* Euklids, enthält keine Einführung in die antiken Methoden der Bruchrechnung.

Unabhängig davon, wem man gewillt ist die Einführung des Beweisens in die griechische Mathematik zuzuschreiben, es ist wohl davon auszugehen, dass die ersten Beweise geometrische Sachverhalte betrafen. Die einfachste Form des Beweisens nutzt eben die natürliche Anschauung: Mathematische Sachverhalte werden dadurch „bewiesen", dass man sie (nach ein wenig Anleitung) aus einer Skizze ablesen kann. Das geht bei geometrischen Sachverhalten natürlich am leichtesten. Aber die Pythagoreer haben eine Möglichkeit gefunden, diese Beweismethodik auch auf die Zahlentheorie zu übertragen:

> Die Pythagoreer veranschaulichten sich die Zahlen an Gruppen von Punkten, die man mit Sternbildern vergleichen könnte. An solchen „Punktrastern" kann man bemerkenswerte zahlentheoretische Gesetze ablesen.[41]

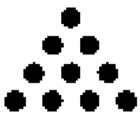


Abb. 9: Tetraktys

Eine besondere Verehrung galt der *Tetraktys*, einem in Form eines gleichseitigen Dreiecks aufgebauten Punktraster mit 10 Punkten (s. Abb. 9). Die einzelnen „Zeilen" des Dreiecks können als die Zahlen 1, 2, 3 und 4 gelesen werden. Damit sind auch die Zahlenverhältnisse der Oktave, Quinte und Quarte an der Tetraktys „ablesbar". Die Tetraktys war den Pythagoreern (wie die Zahl 10) heilig und wurde in der Eidesformel der Pythagoreer erwähnt.

Die Verallgemeinerung der Struktur der Tetraktys führt zu *Dreieckszahlen*. Die Zahlen bis zu einem beliebigen ***n*** werden dabei in Form eines *gleichseitigen* Dreiecks ausgelegt. Für jede Zahl wird eine Zeile benutzt. Die Gesamtzahl der Punkte (oder Zählsteine), die benötigt wird, um ein solches Dreieck mit ***n*** Zeilen auszulegen, ist (in der Sprechweise der Pythagoreer) eine *Dreieckszahl*. Die *Dreieckszahl* zu einem Dreieck mit n-Zeilen ist gleich der *Summe der Zahlen von 1 bis n*. Die Pythagoreer konnten diese mit einer einfachen Formel bestimmen. Sie hatten an ihren dreieckigen Punktrastern abgelesen, dass sich die Summe der Zahlen von 1 bis n gemäß $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n*(n+1)}{2}$ berechnen lässt . Das ist ein Beispiel für die bei Pythagoreern typische Parallelität von Zahlenmystik (Tetraktys) und guter (teilweise brillanter) Mathematik.

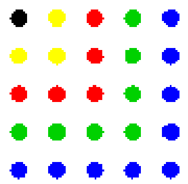


Abbildung 10: Quadratzahlen

Hier noch ein zweites Beispiel für die Leistungsfähigkeit des figürlichen Zugangs zur Zahlentheorie. Für die Pythagoreer hatte der Begriff Quadratzahl eine ganz anschauliche Bedeutung: Ein in Form eines Quadrates aufgebautes Punktraster (s. Abb. 10).

An der Skizze kann man ablesen, dass $(n+1)^2 = n^2 + 2n +1$ gilt. Und man sieht auch leicht ein, dass man durch eine bei 1 beginnende Aufsummierung der *ungeraden* Zahlen der Reihe nach alle Quadratzahlen erzeugen kann. Solche Sachverhalte haben die Pythagoreer tief fasziniert:

Das Ungerade (und *nicht* das Gerade) erzeugt das Quadratische!

Es gilt insbesondere: $1 + 3 + 5 + \cdot\cdot + (2n - 1) = n^2$ oder als moderne Summenformel geschrieben $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. Eine weitere Formel der figürlich inspirierten Zahlentheorie.

Auch Euklid greift übrigens noch gelegentlich zum Mittel der geometrischen Veranschaulichung von Zahlen. Allerdings sind es bei ihm Strecken statt Punktraster, die zur Darstellung von Zahlen benutzt werden.

40 Platon: Sämtliche Dialoge. Bd V. Übersetzt von Otto Apelt. Hamburg: Meiner Verlag 1988. S. 286

41 Herbert Meschkowski: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig: Vieweg 1990. S. 4

Das Gerade und das Ungerade – Eine frühe Theorie

Für die Pythagoreer war die Unterscheidung zwischen *gerade* und *ungerade* nicht nur mathematisch hilfreich, sondern – wie so vieles andere in ihrem Konzept der Zahlen – auch philosophisch aufgeladen. Das *Gerade* galt ihnen als *unbeschränkt*, das *Ungerade* als *beschränkt* (vgl. das Aristoteles Zitat aus der Metaphysik [Stelle 986a] auf Seite 20).[42] Aber solch absonderliche Überzeugungen hinderten die Pythagoreer nicht daran, eine mathematisch gehaltvolle Theorie des Geraden und des Ungeraden zu entwickeln.

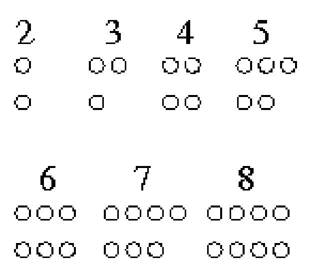


Abbildung 11: Gerade und ungerade Zahlen in zweireihiger Legung (einige Beispiele)

Nach dem, was wir über ihren ansonsten stark figürlichen Zugang zur Zahlentheorie wissen, ist es naheliegend anzunehmen, dass die Pythagoreer auch ihre Theorie des *Geraden* und *Ungeraden* anschaulich unterlegten.

Ein zweireihiges Auslegen von Zahlen mit Zahlsteinen (s. Abb. 11) stellt ein einfaches anschauliches Hilfsmittel dar, das zumindest bei den einfacheren Sätzen der Theorie hilfreich sein kann. Ob die Pythagoreer diese oder eine andere Technik zur Veranschaulichung gerader und ungerader Zahlen benutzten, wissen wir aber nicht. Die Resultate der pythagoreischen Bemühungen um das *Gerade* und *Ungerade* präsentiert uns Euklid im Buch IX seiner Elemente als die Sätze 21-34 und 36.

Sie lauten in abgekürzter Formulierung:

21. Eine Summe gerader Zahlen ist gerade.
22. Eine Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.
23. Eine Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.
24. Gerade minus gerade ergibt gerade.
25. Gerade minus ungerade ergibt ungerade.
26. Ungerade minus ungerade ergibt gerade.
27. Ungerade minus gerade ergibt ungerade.
28. Ungerade mal gerade ergibt gerade.
29. Ungerade mal ungerade ergibt ungerade.
30. Eine ungerade Zahl, die eine gerade Zahl teilt, teilt auch die Hälfte dieser Zahl.
31. Wenn eine ungerade Zahl mit einer Zahl teilerfremd ist, so auch mit dem Doppelten dieser Zahl.
32. Eine Zahl, die durch (wiederholte) Verdoppelung von 2 entsteht, ist ausschließlich gerade mal gerade.
33. Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschließlich gerade mal ungerade.
34. Jede gerade Zahl, die nicht zu den unter 32 und 33 genannten gehört, ist sowohl gerade mal gerade als auch gerade mal ungerade.

Die Theorie gipfelt in Satz 36, der besagt, dass die Zahlen von der Form $2^n(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n)$ vollkommen sind, wenn $p = 1 + 2 + \cdots + 2^n$ prim ist.[43]

(Zur Erinnerung: Eine Zahl ist *vollkommen*, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler ist.)

Obwohl der mathematische Teil der pythagoreischen Lehre des Geraden und Ungeraden auch einige reichlich triviale Elemente enthält, so spielt sie doch beim aufregendsten Ergebnis der ionischen Mathematik eine wichtige Rolle.

42 Meschkowski deutet diese philosophische „Aufladung“ als Konsequenz einer vorschnellen Verallgemeinerung bestimmter mathematischer Sachverhalte (vgl. :Denkweisen großer Mathematiker, S. 6f). Ich denke, die Wurzeln für diese etwas überraschenden Zuordnungen (gerade -unbeschränkt / ungerade - beschränkt) liegen eher im Bereich der pythagoreischen Kosmogonie (den Vorstellungen vom Ursprung der Welt), als im Bereich fehlerhafter mathematischer Theoriebildung.

43 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 180f

Hippasos von Metapont: Die Entdeckung des Inkommensurablen

Das aufregendste Ergebnis der ionischen Mathematik ist sicherlich die Entdeckung *inkommensurabler* Größen. Durch die Entdeckung der inkommensurablen Größen wurden die Beziehungen zwischen Arithmetik und Geometrie auf eine neue Grundlage gestellt:

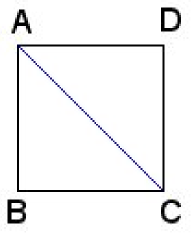


Abbildung 12: Inkommensurable Basis und Diagonale im Quadrat

Es gibt geometrische Größenverhältnisse, die sich *nicht* mittels des Verhältnisses zweier natürlicher Zahlen ausdrücken lassen. Dies gilt insbesondere für das Verhältnis von *Basis* und *Diagonale* im Quadrat. Die Seiten sind (im Sinne der Antike) *nicht vergleichbar* (und damit auch *nicht messbar*), eben *inkommensurabel*.

Aus dem Umstand, dass es *keine* zwei natürlichen Zahlen ***n*** und ***m*** gibt, so dass im Quadrat *Länge der Basis* : *Länge der Diagonale* = ***n*** : ***m*** gilt, folgt unmittelbar, dass es auch *keine* Strecke ***a*** geben kann, als deren Vielfaches sich ***sowohl*** *Basis* wie *Diagonale* ausdrücken lassen. In der Sprechweise der Antike: *Basis* und *Diagonale* des Quadrats haben *kein* gemeinsames Maß.

Ein einfacher Beweis dafür, dass Basis und Diagonale des Quadrats inkommensurabel sind, wurde in einem Anhang zu Buch X von Euklids *Elementen* überliefert. Der Beweis nutzt dabei die pythagoreische Lehre des Geraden und Ungeraden, namentlich den Satz 29 (Ungerade mal ungerade ergibt ungerade).

> Die einzige Anwendung der Lehre von Gerade und Ungerade in den *Elementen* des Eukleides ist der Beweis, dass die Seite und die Diagonale eines Quadrates kein gemeinsames Mass haben. Der Beweis (am Schluss des 10. Buches) läuft so:
>
> Wenn die Diagonale AC und die Seite AB eines Quadrates $ABCD$ ein gemeinsames Mass haben, so sei $m{:}n$ ihr Verhältnis in teilerfremden Zahlen m und n. Aus $AC{:}AB = m{:}n$ folgt $AC^2{:}AB^2 = m^2{:}n^2$, aber es ist $AC^2 = 2AB^2$, also $m^2 = 2n^2$, also m^2 gerade. Demzufolge ist auch m gerade, denn wenn m ungerade wäre, so wäre nach Satz 29 auch m^2 ungerade. Die Zahl m ist also gerade; die Hälfte von m sei h. Wir hatten m und n als teilerfremd angenommen, aber m ist gerade, also ist n ungerade. Aus $m = 2h$ folgt $m^2 = 4h^2$, also $n^2 = 2h^2$. Da also n^2 gerade ist, so ist nach der gleichen Überlegung wie vorhin auch n gerade. Die gleiche Zahl n wäre also zugleich gerade und ungerade. Das ist unmöglich.[44]

Der Sachverhalt, dass es inkommensurable Größen gibt, hat in der Antike Aufsehen erregt. Aristoteles kommt in seinen Schriften mehrfach darauf zu sprechen, und für Platon ist es geradezu Bürgerpflicht, sich mit dem Problem des Inkommensurablen auseinanderzusetzen. Zur Frage, was man unbedingt ins Bildungsprogramm für Hellenen aufnehmen müsse, erklärt er (bzw. lässt seine Figur Der Athener erklären):

> Die eigentlichen Gründe der gegenseitigen Meßbarkeit und Nichtmeßbarkeit. Denn darüber muß man unbedingt zu völliger Klarheit gelangen, wenn man nicht ein erbärmlicher Wicht bleiben will. (Die Gesetze. Buch VII, 820)[45]

Da diese Reaktionen von Platon und Aristoteles schon deutlich vor der Veröffentlichung von Euklids Elementen erfolgten, kann der Nachweis der Existenz des Inkommensurablen nicht zu den wenigen neuen Resultaten gehören, die Euklid selbst zu seinen Elementen beisteuerte.

---

44 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 181f. Hinweis: Bei der Referierung des Beweises orientiert sich v.d. Waerden an einem in einem gesonderten Anhang zu Buch X überlieferten Beweis. Der Beweis, der dem letzten Satz von Buch X im Haupttext der *Elemente* folgt, wählt einen etwas anderen Argumentationsgang. Vgl. dazu auch Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin: Walter de Gruyter 1971. S. 562, Fußnote 60.

45 Platon: Sämtliche Dialoge. Bd VII. Übersetzt von Otto Apelt. Hamburg: Meiner Verlag 1988. S. 311

Die Bemühungen, den Ursprung der Einsicht in die Existenz inkommensurabler Strecken genau zu lokalisieren, haben zu dem Pythagoreer *Hippasos von Metapont* als Hauptverdächtigem geführt.[46] Biografische Details zu diesem Philosophen und Mathematiker sind kaum bekannt. Er lebte um 450 v.Chr. in Metapont (oder in der Nähe). Selbst der sonst so geschwätzige Diogenes Laertios hat in diesem Fall nur wenig zu bieten:

> Auch Hippasos aus Metapont war Pythagoreer. Er lehrte, der Kosmos verändere sich in bestimmter Zeit und das Universum sei unbegrenzt und in beständiger Bewegung.[47]

Etwas ergiebiger ist Jamblichos (Iamblichos):

> *Jamblichos* aus Chalkis (etwa 283 – 330) berichtet im ersten Buch seines Werkes „Über die pythagoreische Philosophie", daß der *Pythagoras*-Schüler *Hippasos* als erster „die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel [Dodekaeder; NF] beschrieben und deshalb als ein Gottloser im Meer umgekommen" sei. Ferner habe er „als erster das Wesen der Meßbarkeit und Unmeßbarkeit an Unwürdige verraten". Deshalb sei er nicht nur aus dem pythagoreischen Bunde ausgestoßen worden, sondern sei auch sein Grab bereitet worden wie einem, der gänzlich aus dem Kreise seiner früheren Gefährten verschwinden soll.
>
> Der Zorn der am Buchstaben der pythagoreischen Lehre Hängenden war verständlich: *Hippasos* hatte mit dem Nachweis inkommensurabler Strecken die pythagoreische Grundlehre in Frage gestellt und er hatte sich offenbar nicht gescheut diese Erkenntnis „Unwürdigen" (d.h. nicht dem Orden angehörenden Leuten) weiterzugeben.[48]

Auch wenn man nicht alle Details der Mitteilungen von Jamblichos (Iamblichos) für einen unanfechtbaren Tatsachenbericht halten muss, dass nicht alle Pythagoreer über das Verhalten von Hippasos hoch erfreut waren, ist durchaus glaubwürdig.

Wie soll man am Motto *Alles ist Zahl* festhalten können, wenn sich selbst die Längen-Verhältnisse zwischen einfachen geometrischen Größen nicht durch Zahlen beschreiben lassen? Wie soll man jetzt noch daran glauben können, dass sich einem selbst die Geheimnisse des Himmels offenbaren, wenn man nur – wie bei der Harmonielehre – jeweils die unterliegenden Zahlen und ihre Beziehungen erforscht? Die Entdeckung des Inkommensurablen ist ein erheblicher Dämpfer für das pythagoreische Motto *Alles ist Zahl*. Und Hippasos hat das auch noch, zu allem Überfluss, an die „Unwürdigen" verraten, und dies, obwohl doch klar war, dass die Pythagoreer viele Feinde hatten.

Wie kam es überhaupt dazu, dass Hippasos als Pythagoreer auf dieses für die pythagoreische Denkungsart so wenig erfreuliche Ergebnis stieß? Der oben referierte Beweis ist ein indirekter Beweis. Ein solcher Beweis gelingt nur, wenn man weiß, was man beweisen will. *Wahrscheinlich* war also dieser *indirekte Beweis* nicht der erste Zugang zum Thema *Inkommensurables*. Eine Reihe von Gründen spricht dafür, dass es ausgerechnet ein detailliertes Studium des *Pentagramms* (des Symbols der Pythagoreer) war, das Hippasos einsehen ließ, daß es inkommensurable Größen gibt. Erst danach, so die Spekulation, wurde dann entweder von Hippasos selbst oder einem anderen Mathematiker (evtl. sogar einem Nicht-Pythagoreer) der überlieferte (oben referierte) *Widerspruchsbeweis* entwickelt.

Obwohl wir *keine* direkten Belege dafür haben, dass die Einsicht in die Existenz inkommensurabler Strecken zuerst am Pentagramm gewonnen wurde, wird diese Variante hier kurz beleuchtet werden. Diese Annahme ist nämlich höchst plausibel. (Und ich will

---

46 Die Gründe, die zu dieser Zuschreibung führen, sind in der sehr informativen Arbeit *Die Entdeckung der Inkommensurabilität* von Kurt v. Fritz zusammengefasst. Nachzulesen in: Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin: Walter de Gruyter 1971. S. 545ff

47 Diogenes Laertios: Leben und Lehre der Philosophen. Stuttgart. Reclam 1998. S. 403

48 Herbert Meschkowski: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig: Vieweg 1990. S. 7f

hier ja kein Risiko eingehen, jemandem wichtige Informationen vorzuenthalten. Es droht immerhin die Herabstufung zum *erbärmlichen Wicht*; siehe Platon Zitat auf Seite 23.)

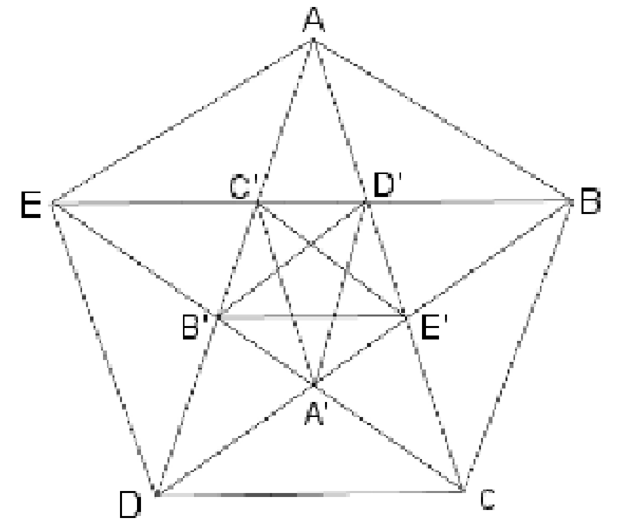


Abbildung 13: Pentagramm und regelmäßiges Fünfeck

Es gibt einige Besonderheiten des Pentagramms, die geradezu zu einer Entdeckung inkommensurabler Strecken einladen. Wenn man ein Pentagramm in ein regelmäßiges Fünfeck (A - E) einträgt, dann bildet es ein zweites regelmäßiges Fünfeck (A‘ - E‘), in das man wiederum ein Pentagramm eintragen kann. Dieses Pentagramm bildet wiederum ein neues regelmäßiges Fünfeck, in das man wiederum ein Pentagramm eintragen kann, und immer so fort (s. Abb. 13).

Außerdem gibt es einige interessante Beziehungen zwischen den Strecken des äußeren Fünfecks samt Pentagramm und den Strecken des inneren Fünfecks und Pentagramms.

Es gilt: AB = BC‘, C‘E = D‘B, D‘B = C‘E‘.

Wenn man nun vor diesem Hintergrund versucht, das gemeinsame Maß der Strecken AB und BE (*Seite* und *Diagonale* eines regelmäßigen Fünfecks) zu bestimmen, so landet man sehr schnell bei der Einsicht/Vermutung, dass es ein solches gemeinsames Maß *nicht* gibt, die Strecken also inkommensurabel sind. Wie aber hat man in der Antike das gemeinsame Maß zweier Strecken bestimmt?

> Wieder war die Methode eine alte, die viele Jahrhunderte vor dem Beginn griechischer Philosophie und Wissenschaft den Handwerkern als Faustregel bekannt war, nämlich die Methode der „Wechselwegnahme“, durch die man das größte gemeinsame Maß findet.[49]

Der Schematismus der *Wechselwegnahme* entspricht dem euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers.[50] Man nimmt das Kleinere vom Größeren so häufig wie möglich weg. Geht es auf (bleibt kein Rest), dann ist das Kleinere das gemeinsame Maß. Anderenfalls übernimmt jetzt das Kleinere die Rolle des Größeren und der Rest die Rolle des Kleineren. Der eben gewonnene Rest wird nun als das Kleinere so häufig wie möglich vom jetzt Größeren (dem Kleineren der vorherigen Runde) weggenommen. Bleibt kein Rest ist man fertig (und die aktuell benutzte „Wegnahmestrecke“ ist das gesuchte Maß). Ansonsten wiederholt sich alles. Und immer so fort, bis man das gemeinsame Maß bestimmt hat (wenn es denn eines gibt).

Praktiziert man die Wechselwegnahme mit den Strecken BE und AB, so ergibt sich (unter Ausnutzung der oben aufgeführten 3 Sachverhalte) folgendes Bild:

1. Runde BE – BC‘ = C‘E ; 2. Runde BC‘ - D‘B = C‘D‘

Aufgabenstellung der 3. Runde: **C‘E‘ - C‘D‘**! Man ist wieder beim Ausgangsproblem angekommen: Bestimme das gemeinsame Maß von *Seite* und *Diagonale* eines regelmäßigen Fünfecks. Man ist nur ein Fünfeck weiter nach innen gewandert. Beim Versuch, das gemeinsame Maß zu bestimmen, landet man stets aufs Neue bei dem Problem *Seite* und *Diagonale* vergleichen zu müssen. Die Fünfecke werden kleiner, aber stets bleibt ein Rest.

Dass das Verfahren der Wechselwegnahme hier zu keinem Ende kommt, ist Ausdruck des Umstandes, dass sich einerseits die Seiten des Pentagramms wechselseitig im Verhältnis

49 Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin: Walter de Gruyter 1971. S. 565f vgl. auch C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Heidelberg New York: Springer Verlag 2003. S. 35ff und Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 100ff

50 Siehe z.B. www.antike-griechische.de/Euklid.pdf S. 21

des goldenen Schnitts teilen und andererseits die Seite des regelmäßigen Fünfecks mit dem größeren Teil der Diagonale übereinstimmt (AB = BC‘). Da der goldene Schnitt ein Verhältnis ist, das sich *nicht* mittels natürlicher Zahlen ausdrücken lässt, kann es auch kein gemeinsames Maß für *Seite* und *Diagonale* des regelmäßigen *Fünfecks* geben. Und wenn man bewiesen hat, dass es kein gemeinsames Maß für diese beiden Größen geben kann, dann hat man damit auch bewiesen, dass sie inkommensurabel sind.

Warum ist die Vorstellung, dass die Existenz inkommensurabler Größen zuerst beim Studium des Pentagramms bemerkt wurde, so einladend? Dass sich die Pythagoreer intensiv mit dem Symbol ihres Bundes, dem Pentagramm, beschäftigt haben, scheint ganz selbstverständlich. Dass sie dabei übersehen haben sollten, dass das Pentagramm ein reguläres Fünfeck bildet, in das man wieder ein Pentagramm zeichnen kann, ist kaum anzunehmen. Und auch dass sie das nette Detail bemerkt haben, dass sich dieses Eintragen immer neuer, immer kleinerer Pentagramme beliebig oft wiederholen lässt, kann wohl als beinahe sicher gelten. Wahrscheinlich war dieses Wissen bei den Pythagoreern sogar ein Teil des Allgemeinwissens der Brüder und Schwestern des Bundes und keinesfalls auf einen kleinen Kreis kompetenter Mathematiker begrenzt.

Die drei benutzten Sachverhalte: AB = BC‘, C‘E = D‘B, D‘B = C‘E‘ sind nicht besonders schwierig zu beweisen und es ist überaus wahrscheinlich, dass das hierfür erforderliche geometrische Wissen damals schon verfügbar war.[51] Hippasos hat sich zudem als Pythagoreer besonders mit dem Dodekaeder, dem regulären Polyeder aus Fünfecken, beschäftigt. Er dürfte also mit dem damaligen geometrischen Wissen zu den Themen Fünfeck und Pentagramm gut vertraut gewesen sein.

Verfügten die Pythagoreer damals schon über einen Beweis, der klarstellte, dass, wenn das Verfahren der Wechselwegnahme nicht in *endlich* vielen Schritten zum Erfolg führt, kein gemeinsames Maß existiert? Obwohl uns heute ein solcher Beweis relativ wenig Schwierigkeiten bereitet, ist fraglich, ob ein solcher Beweis damals schon existierte. Es ist gut möglich, dass derartige Fragestellungen und die zugehörige Beweismethodik den Pythagoreern noch fremd waren. Vielleicht waren die hier skizzierten Überlegungen zum Pentagramm also nur ein Anlass zur *Vermutung* der Existenz inkommensurabler Strecken.

Eine derartige Vermutung ist jedoch der denkbar beste Anlass, um nach einem Beweis für die Vermutung zu suchen. Vielleicht wurde der Widerspruchsbeweis an Hand von *Seite* und *Diagonale* eines *Quadrats* ja gefunden, weil dringend ein Beweis für eine höchst sensationelle Vermutung gesucht wurde. *Vielleicht* galt die Existenz inkommensurabler Strecken bis zum Auffinden dieses Widerspruchsbeweises nur als eine noch nicht bewiesene *Vermutung*. Eine Vermutung, die beim Studium des Pentagramms entstanden war.

Andererseits sollte man sich bei seinen Einschätzungen aber auch nicht allzu naiv an den gehobenen Beweisansprüchen der modernen Mathematik orientieren. Vielleicht ging man damals auch ganz *beweisfrei* davon aus, dass wenn das Verfahren der Wechselwegnahme zu keinem Ende kommt, kein gemeinsames Maß existieren kann. Vielleicht sah man gar keinen Bedarf für den Beweis einer solchen „Selbstverständlichkeit“.

Es ist also durchaus auch möglich, dass Hippasos den oben skizzierten Argumentationsgang zur Inkommensurabilität von *Seite* und *Diagonale* im regelmäßigen *Fünfeck* auch ohne weitere Klärungen zur Wechselwegnahme als Beweis akzeptiert hat.

> Denn die Frage ist nicht, ob Hippasos einen Beweis liefern konnte, der in allen seinen Schritten Euklid oder Hilbert befriedigt hätte, sondern ob er imstande war, einen Beweis zu finden, der auf der Stufe, die das mathematische Denken zu seiner Zeit erreicht hatte, als völlig überzeugend angesehen wurde, (…).[52]

Das letzte Urteil zu all diesen Fragen überlasse ich dem Leser.

51 Die Pythagoreer hatten die Mathematik ja nicht nur im Bereich Zahlentheorie voran gebracht, sondern auch im Bereich Geometrie beständig weiter entwickelt.

52 Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin: Walter de Gruyter 1971. S. 569

Anschauliche Begründung und logische Herleitung

Auf *Anschauung* beruhende Einsicht und *logische Schlussfolgerung* sind die beiden Hauptkomponenten der antiken Beweiskultur. Wenn die hier angebotenen Thesen zu den Anfängen der beweisenden Mathematik im Kern richtig sind, dann hat die griechische Mathematik ihre Beweise anfänglich stark auf Anschauung gegründet. Sehr frühe Beweise konnten zwar (unter anderem) logische Schlussfolgerungen enthalten, waren aber an entscheidenden Stellen auf das anschauliche Ablesen von mathematischen Sachverhalten angewiesen.

In Euklids *Elementen* wird bereits die axiomatische Methode praktiziert. Die rein logische Herleitung neuer Sätze aus Axiomen (Postulaten) und den bereits bewiesenen Sätzen ist dort das typische Vorgehen bei geometrischen Beweisen. Die Anschauung als Mittel des Beweisens wird gemieden. Die angebotenen Skizzen sollen nur noch didaktisches Hilfsmittel sein, um den beweisführenden Gedanken besser verfolgen zu können. Selbst wenn Euklid sein Leitbild einer streng axiomatisch aufgebauten Geometrie an einigen Stellen auch schon Mal etwas verfehlt, das Bild eines gelungenen Beweises hat bei Euklid nicht mehr viel mit einem Appell an die Einsichten der Anschauung zu tun.

Die Entwicklung eines Beweiskonzeptes, das auf *rein* logischer Herleitung beruht, wird von Reidemeister als eine der vielen Leistungen der Pythagoreer verbucht:

> Die Pythagoräer entdeckten die Möglichkeit, mathematische Tatbestände auf Hypothesen zurückzuführen, aus denen diese Tatbestände durch *Denken* gefolgert werden können. Damit entdeckten sie aber zugleich einen Weg, der aus dem Anschaulichen heraus zu geometrischen Tatsachen führt, die *nur* dem Denken zugänglich sind.
> Die Lehre vom Geraden und Ungeraden gipfelt nämlich in dem Nachweis, daß die Diagonale d eines Quadrates und die Quadratseite s desselben nicht mit derselben Einheitsstrecke e gemessen werden können. Das läßt sich nicht veranschaulichen (wie sich etwa der Satz des Pythagoras veranschaulichen läßt), sondern nur denken und erschließen, und zwar nur mit Hilfe eines indirekten Beweises, der außerdem wesentlich auf Eigenschaften von Zahlen beruht. Die Annahme eines Maßes hat nämlich zur Folge, daß es Zahlen geben müßte, die gleichzeitig gerade und ungerade sind.
> So ist es hier also das Denken, das hier über das Sein und das Nichtsein eines geometrischen Tatbestandes entscheidet.
> Damit vollzieht sich etwas Außerordentliches. Das anschauliche Quadrat, von dem die Geometrie handelte, entschwindet beim näheren Zugriff der Untersuchung. Und der Geometer ist nicht mehr imstande, das Quadrat selbst aufzuweisen, auf das sich seine Gedanken gerichtet haben.[53]

Reidemeister geht hier davon aus, dass der *Widerspruchsbeweis* zur Inkommensurabilität von Basis und Diagonale im Quadrat *pythagoreischen* Ursprungs ist. Wenn die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Hypothese (dass die Existenz inkommensurabler Strecken zunächst am Pentagramm eingesehen wurde) richtig ist, dann kann dieser *Widerspruchsbeweis* zur Unvergleichbarkeit von Basis und Diagonale im Quadrat auch aus anderen Quellen stammen. Richtig an Reidemeisters Analyse ist auf jeden Fall, dass dieser *Widerspruchsbeweis* allein auf logischer Schlussfolgerung beruht und keine nur anschaulich nachvollziehbaren Teile enthält. Es wäre natürlich schön zu wissen, genau *wann* und *wie* der Prozess der Entkoppelung des *Beweisens* von der *Anschauung* begonnen hat. Aber obwohl Reidemeisters Vermutung, dass dies eine der Leistungen der Pythagoreer war, nicht ganz unplausibel ist, ist diese Einordnung auch nicht ganz sicher. Vielleicht hat ja der Pythagoreer Hippasos die Existenz inkommensurabler Strecken zunächst am Pentagramm eingesehen. Vielleicht entstand der *Widerspruchsbeweis* erst später. Vielleicht war der Autor dieses *Widerspruchsbeweises* nicht einmal Pythagoreer.

53 Kurt Reidemeister: Das exakte Denken der Griechen. Hamburg: Claassen & Goverts 1949. S. 52

Es gibt beim obigen Reidemeister-Zitat noch einen Aspekt, der einer kurzen Kommentierung würdig ist: Reidemeister sieht die Ablösung des *Quadrats der Geometrie* von den sinnlich *wahrnehmbaren Quadraten* unserer Erfahrungswelt in Zusammenhang mit der Herausbildung eines auf logischer Herleitung beruhenden Beweiskonzeptes. Er schreibt:

> So ist es hier also das Denken, das hier über das Sein und das Nichtsein eines geometrischen Tatbestandes entscheidet. Damit vollzieht sich etwas Außerordentliches. Das anschauliche Quadrat, von dem die Geometrie handelte, entschwindet beim näheren Zugriff der Untersuchung. Und der Geometer ist nicht mehr imstande, das Quadrat selbst aufzuweisen, auf das sich seine Gedanken gerichtet haben.

Hier ist *zumindest als Ergänzung* anzumerken, dass wichtige Abstraktionsschritte zur Herausbildung eines *mathematischen Konzepts* von geometrischen Figuren durchaus auf dem Boden der *Anschauung* möglich sind und aller Wahrscheinlichkeit nach auch dort zuerst vollzogen wurden. Die *mathematische Anschauung* verbindet die Erfahrungen der sinnlichen Wahrnehmungen erstaunlich leichtgängig mit *mathematischen Idealisierungen*. In der *mathematischen Idealisierung* hat eine Linie keine Breite und ein Punkt keine Ausdehnung. Die Leichtigkeit und Selbstverständlichkeit, mit der diese (und noch viele andere) Idealisierungen von beinahe jedermann in die *mathematische Anschauung* eingebunden werden können, ist bis heute eine wichtige (man könnte auch sagen: unerlässliche) Grundlage des schulischen Geometrie-Unterrichts. Bereits vor dem Übergang zum rein logischen Beweisen kann sich die Mathematik also von einer zu engen Anbindung an die sinnlichen Erfahrungen ablösen und so abstrakte (nur gedachte) Figuren (auch und gerade) einem stark anschaulichen Zugang zur Geometrie zu Grunde legen.

Man *sieht* z.B. bei der Abb. 13 (s. Seite 25), dass man beliebig viele Pentagramme ineinander-schachteln kann, eben weil man die Breite der Linien ganz beiläufig ignoriert. Man entwickelt im Kopf eine Vorstellung, zu der die sinnlich wahrnehmbare Skizze nur inspiriert. *Eine Linie mit Breite symbolisiert jeweils eine Linie ohne Breite.* Nur deswegen kann der im vorherigen Abschnitt vorgestellte Argumentationsgang überhaupt zum Ergebnis führen, dass Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck kein gemeinsames Maß haben. Dabei lässt sich unter Heranziehung der *mathematischen Anschauung* die *nicht* so ohne weiteres *anschaulich* darstellbare Eigenschaft der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale begründen. Wie man dabei sieht: Eine gut kultivierte *mathematische Anschauung* ist ein unglaublich leistungsfähiges Hilfsmittel. Es ist bis heute das wichtigste Instrument zur Entdeckung mathematischer Sachverhalte. Bei der Veröffentlichung eines Resultats wird dann aber (aus gutem Grunde) meist ein Beweis beigefügt, der ohne Rückgriff auf die Anschauung auskommt.

Was die historische Funktion der *Anschauung* in der griechischen Mathematik angeht, möchte ich zum Schluss dieses Abschnitts auf einen Aspekt hinweisen, der gerne übersehen wird: Sowohl die *anschauliche Begründung* wie die *logische Herleitung* von Resultaten sind *fehleranfällige* Vorgänge. Angesichts der menschlichen Neigung zum Irrtum ist es sehr vorteilhaft, wenn man zwei voneinander unabhängige Talente hat, die sich wechselseitig ergänzen und auch zur wechselseitigen Überprüfung dienen können. Die Talente zur Begründung durch die *mathematische Anschauung* wie zur *logischen Herleitung* wurden in der Mathematik in Kooperation kultiviert. Dass dieses sich wechselseitige Stützen bei der Kultivierung des Denkens nicht ganz überflüssig war, sieht man, wenn man einen Blick auf die griechische Philosophie wirft: *Parmenides & Co.* gelangten (in Elea) bei ihren Versuchen zum streng logischen Argumentieren zur trugschlüssig erzielten Behauptung, dass es keinerlei Veränderung geben könne. Sie kannten bzw. akzeptierten keine Kontrolle ihrer Schlüsse durch die Anschauung![54]

54 Es gehört zu den Kuriosa, dass etliche moderne Autoren bei der Frage nach den *griechischen Ursprüngen der Logik* immer noch gerne auf den vorsokratischen Philosophen *Parmenides* verweisen und dabei die Leistungen der beweisenden Mathematik entweder gänzlich übergehen oder nur am Rande erwähnen. Siehe hierzu auch *Vorsokratik: Von Xenophanes bis Demokrit* unter: www.antike-griechische.de/Vorsokratik-2.pdf .

Oinopides von Chios: Nur mit Zirkel und Lineal

Um 420 (v.Chr.) lag die Schaffensperiode des Pythagoreers *Oinopides*. Wenn es strikt der Reihe nach ginge, dann wäre er in diesem Papier also erst etwas später dran. Interessant ist Oinopides wegen des (ihm von vielen Autoren zugeschriebenen) neuen Ideals *geometrischer Strenge*. Man *vermutet* in ihm den Urheber des antiken „*nur mit Zirkel und Lineal*".

Oinopides von Chios ist eigentlich mehr als Astronom denn als Mathematiker tätig gewesen. Es gibt jedoch eine Auffälligkeit an seiner Mathematik, die es erforderlich macht, hier auf ihn zu sprechen zu kommen: Er untersucht zwar wenig aufregende, einfache Fragen der Geometrie, er versucht diese aber *nur* mit *Zirkel und Lineal* zu bewältigen. Konstruktionen, bei denen andere Hilfsmittel eingesetzt werden, tauchen bei ihm nicht auf.

Wir kennen diese Beschränkung der Geometrie auf allein durch *Zirkel und Lineal* erzeugbare Konstruktionen von Euklid. Und wir wissen aus verschiedenen Quellen, dass Platon bereits vorher diese Art der Selbst-Beschränkung in der Geometrie eingefordert hat. Sind die Arbeiten des Pythagoreers Oinopides der Ursprung dieser Idee der Selbstbeschränkung bei geometrischen Konstruktionen? Obwohl wir keine direkten Belege dafür haben, lässt sich *gut vermuten*, dass bereits Oinopides eine solche Selbstbeschränkung in der Geometrie ausdrücklich als methodisches Ideal empfahl.

Dass Oinopides in der Beschränkung auf *Zirkel und Lineal* ein neues methodisches Ideal erblickte und sich nicht rein zufällig auf solche Konstruktionen beschränkte, ist auch deswegen plausibel, weil es (zumal für einen Pythagoreer wie ihn) damals durchaus reichlich Grund gab, um über methodische Fragen nachzudenken:

> Die Entdeckung der Inkommensurabilität muß in pythagoreischen Kreisen einen ungeheuren Eindruck gemacht haben, weil sie mit einem Schlag den Glauben zerstörte, auf dem bis dahin die ganze Philosophie der Pythagoreer beruht hatte, nämlich daß alle Dinge in ganzen Zahlen ausgedrückt werden könnten. Dieser Eindruck spiegelt sich deutlich in jenen Legenden, welche berichten Hippasos sei von den Göttern bestraft worden, weil er diese schreckliche Entdeckung veröffentlicht habe.[55]

Die Geometrie konnte sich nach der Entdeckung des *Inkommensurablen* nicht mehr im sicheren Hafen der natürlichen Zahlen wähnen. Hinzu kommen noch die neuen Beweis-Konzepte: Die langsame *Verabschiedung der Anschauung* als Mittel des Beweisens und das zunehmende gängig werden *indirekter Beweise* (Widerspruchsbeweise).[56]

All dies geschah zusätzlich vor dem Hintergrund der *eleatischen* Philosophie (*Parmenides* & Co.), die mit den Resultaten ihrer *Trugschlüsse* (es gibt keine Bewegung, keine Veränderung, kein Werden und kein Vergehen) hausieren ging. Die Position fand zwar nur wenige Anhänger, aber bei einigen ihrer Argumente war die Quelle der Fehlschlüssigkeit doch so subtil, dass deren Entlarvung in der Antike schwer fiel. Man glaubte nicht an die Schlussfolgerungen; wo aber der Fehler lag, das konnte man nicht immer genau sagen. So gesehen erscheint es doch als ganz natürlich, wenn man, nach dem Verlust der Anbindung an die Welt der natürlichen Zahlen und dem Auftauchen neuer Beweismethoden, nach Sicherungen suchte, um zu verhindern, dass in die Geometrie irgendwann *eleatische* Verhältnisse einziehen und dann die kuriosesten Dinge als bewiesen gelten.

Die These, dass Oinopides ein neues methodisches Ideal (*nur* mit *Zirkel und Lineal*) auch deswegen als notwendig erachtete, um die Geometrie so vor „*eleatischen*" Verhältnissen schützen zu können, erscheint zwar plausibel, wird jedoch nicht durch Belege gestützt.

Sicher ist hingegen, dass Euklid dieses *Ideal* später in seinen *Elementen* aufgreift. Andere geometrische Konstruktionsmethoden werden deswegen aber nicht völlig ungebräuchlich.

55 Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin: Walter de Gruyter 1971. S. 570

56 Auch wenn wir dies alles nicht genau datieren können, so ist doch sehr plausibel, dass im 5. Jh v.Chr. die Anschauung als Beweismittel an Bedeutung verlor und indirekte Beweise komplementär an Bedeutung gewannen.

Die drei klassischen Probleme der antiken Geometrie

Im 5. Jahrhundert (v.Chr.) werden drei geometrische Probleme zunehmend populär:

1. Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels;
2. Die Verdoppelung eines Würfels (*delisches Problem*);
3. Die Quadratur des Kreises.

Zu 1.) Man kannte in der Antike ein einfaches Verfahren zur Dreiteilung des *rechten* Winkels. Dies konnte auf Winkel mit 180° und 270° übertragen werden. Was aber fehlte war ein Verfahren zur Teilung eines beliebigen Winkels. Da man in der Antike bereits früh die Winkeladdition beherrschte und man Winkel mit 90°, 180° und 270° dreiteilen konnte, fehlte genau genommen nur noch ein Verfahren mit dem man in der Lage war, beliebige Winkel zwischen 0° und 90° zu dritteln. Dies galt es zu finden.

Zu 2.) Man kannte in der Antike ein einfaches Verfahren zur Verdoppelung des Quadrates: Wenn die Fläche eines gegebenen Quadrats mit der Basis ***a*** verdoppelt werden soll, so muss man hierfür nur ein neues Quadrat über der *Diagonale* des Quadrats mit Basis ***a*** errichten. Wenn man von der ebenen Figur *Quadrat* zu seinem räumlichen Bruder dem *Würfel* übergeht, dann führt die analoge Idee, das Volumen des Würfels zu verdoppeln, indem man seine Raumdiagonale als Basis nimmt, *nicht* zum Erfolg. Was muss man also tun, um einen Würfel zu verdoppeln? Das Problem wurde gern in die Geschichte eingekleidet, dass der Gott Apollon verlangt habe, dass sein würfelförmiger Altar im Tempel auf Delos verdoppelt werden solle. Daher die Bezeichnung *delisches Problem*.

Zu 3.) In der Antike galt die Fläche einer Figur erst als richtig verstanden, wenn man auch wusste, wie man sie *quadriert* (sprich: wie man ein zur Figur flächengleiches Quadrat konstruiert). Euklids Elemente enthalten z.B. einen Satz (II, 14), der sich der Überführung beliebiger Polygone (geradlinig-begrenzter Figuren) in Quadrate widmet. Was gesucht wurde war das dazu passende Gegenstück für Kreise. Wie erzeugt man zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat? Ein bereits in der Antike erzieltes Resultat zeigte, dass es ausreicht ein Quadrat zu konstruieren, das zum vorgegebenen Kreis umfangsgleich ist. Von hier aus führt dann ein kurzer Weg zum flächengleichen Quadrat.

Die drei Probleme wurden also nicht willkürlich gewählt, sondern haben sich alle drei jeweils ganz natürlich bei der Arbeit am Ausbau der Geometrie ergeben. Diese drei Probleme waren nicht nur dem kleinen Kreis der produktiv tätigen Mathematiker geläufig, sondern waren auch weit darüber hinaus bekannt. Das Wissen um die Existenz des Problems der *Quadratur des Kreises* gehörte sogar schon zur (gehobenen?) Allgemeinbildung. Sonst hätte ein Komödien-Dichter wie Aristophanes keine ironischen Anspielungen auf die *Quadratur des Kreises* in seinem Stück *Die Vögel* verwenden können.[57]

Die Antike hat im Lauf der Zeit alle drei Probleme *gelöst*. Aber sie fand zu *keinem* der drei Probleme eine Lösung, deren geometrische Konstruktionen mit der Beschränkung auf *Zirkel und Lineal* zurecht kam. Jedes Mal wurden Konstruktionen benötigt, die sich *nicht* allein mit *Zirkel und Lineal* erzeugen ließen. Euklid, der sich in seinen *Elementen* konsequent am Ideal der nur mit *Zirkel und Lineal* ausführbaren Konstruktionen orientiert, nimmt deswegen entsprechende Resultate nicht in seinen Standardlehrtext auf.

Dass man keine Möglichkeit fand, wenigstens eins der drei Probleme nur mit *Zirkel und Lineal* zu lösen, war jedoch *nicht* Ausdruck der Unfähigkeit antiker Mathematiker. Wie man in der Moderne der Reihe nach bewies, sind *alle drei* Probleme mit *Zirkel und Lineal* alleine *nicht* bewältigbar.

Eins der drei Probleme, die *Quadratur des Kreises,* war da übrigens schon als Metapher für schwierigste bis unlösbare Probleme in den allgemeinen Sprachschatz eingegangen.

57 vgl.: Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 220f und B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 214f

Hippokrates von Chios: Seine „Elemente“ und seine „Möndchen“

Abbildung 14: Die Insel Chios vor der kleinasiatischen Küste

Hippokrates belegt, dass man auch als *Nicht-Pythagoreer* Wichtiges zur Mathematik beitragen kann. Und er ist ein Beispiel für die intellektuelle Produktivität der Sophisten, jenen Lehrern Griechenlands, die (dank der üblen Nachreden von Platon) im deutschsprachigen Raum noch immer ein erhebliches Imageproblem haben.

> Hippokrates von Chios (um 440 v.Chr.) – nicht zu verwechseln mit Hippokrates von Kos (ca. 460 – 370 v.Chr.), einem Arzt auf den der sogenannte Hippokratische Eid der Ärzte zurückgeht – ist in vielerlei Hinsicht eine bemerkenswerte Gestalt der griechischen Wissenschaftsgeschichte. Er soll – durch Piraten oder betrügerische Zöllner – sein Vermögen eingebüßt und dann im Besitz des in Athen erworbenen Wissens, als Weisheitslehrer, als Sophist, seinen Lebensunterhalt bestritten haben. Diese Erzählung, ob wahr oder erfunden, spiegelt jedenfalls die neue Stellung der Wissenschaft wieder: Das gesellschaftliche Interesse an Wissenschaft und Redekunst war immerhin so gestiegen, dass die Vermittlung von Wissen entlohnt wurde.[58]
> Hippokrates war der berühmteste Geometer des 5. Jh. Er kannte den Zusammenhang zwischen Peripheriewinkel und Bogen. Er konnte das regelmäßige Sechseck, den Umkreis zu einem Dreieck u. a. m. konstruieren. Er verwendete den Begriff der Ähnlichkeit, er wußte, daß sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate über den entsprechenden Seiten verhalten. Er kannte Verallgemeinerungen des pythagoreischen Lehrsatzes für das stumpf- und das schiefwinklige Dreieck. Er konnte jedes Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.
> Darüber hinaus stammt wohl von Hippokrates eine erste zusammenfassende Darstellung der Geometrie unter dem Titel „Elemente“, und zwar nach dem seitdem klassisch gewordenen Darstellungsschema: Voraussetzung, Satz, Beweis. Er führte dort auch die Bezeichnungsweise bei geometrischen Figuren – für Punkte, Strecken, Flächen – mittels Buchstaben ein. Doch sind diese „Elemente“ durch die späteren ausführlicheren „Elemente“ des Euklid verdrängt worden. Immerhin dürfte aber der Inhalt der Bücher I, II, III und IV der Euklidischen „Elemente“ auf diese Vorlage des Hippokrates zurückgehen.[59]

Die „Elemente“ des Hippokrates blieben keineswegs der einzige voreuklidische Versuch, die Ergebnisse der Mathematik zu sammeln und zu ordnen. Euklids Elemente haben diese Vorläufer jedoch schlichtweg überflüssig gemacht. Man sah einfach keinen Anlass mehr, die Elemente des Hippokrates von Chios (oder des Leon oder des Theudios von Magnesia) weiterhin zu kopieren. Und so gingen diese Handschriften im Lauf der Zeit ganz beiläufig verloren.

Deswegen kann die überaus spannende Frage, wieviel seiner Wissenschaftslehre Aristoteles von solchen voreuklidischen „Elementen“ übernommen hat, nicht verbindlich beantwortet werden. Angesichts der Rolle, die diesen voreuklidischen Elementen in der Mathematik-Geschichte zugesprochen wird, ist es jedoch *unwahrscheinlich*, dass diese *keinen* Einfluss auf das Modell der *beweisenden Wissenschaft* in der Wissenschaftslehre des Aristoteles gehabt haben.[60]

> Nach dem Mathematikerverzeichnis von Proklos (…) hat „Hippokrates als erster ‚Elemente‘ zusammengestellt“ (…). „Reichhaltigere und nach

58 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 172

59 Hans Wußing: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.Frankfurt: Harri Deutsch Verlag 2008. S. 46 (Wußings Charakterisierungen der *Elemente des Hippokrates* enthalten dabei auch ein gutes Stück freihändiger Spekulation.)

60 Siehe hierzu auch: *Aristoteles: Logik und Methodik in der Antike* unter: www.antike-griechische.de/Aristoteles.pdf vgl. insbesondere die Abschnitte *Die Klassifikation der Wissenschaften* und *Wissen und Erklären*.

Brauchbarkeit der Beweise bessere ‚Elemente' schrieb Leon", der etwas jünger als Eudoxos war. Schließlich hat Theudios „die ‚Elemente' in ein gut geordnetes System gebracht" (...). Aus diesem Werk von Theudios könnte Aristoteles die Geometrie gelernt haben.

Was zur Zeit des Hippokrates naheliegend und fast notwendig war, war eine Kodifizierung oder lehrbuchmäßige Darstellung der elementaren Konstruktionen: Halbieren von Strecke und Winkel, Errichten von Senkrechten, Fällen von Loten usw. Diese Konstruktionen mußten gerechtferigt werden, man mußte z.B. zeigen, daß der nach der Vorschrift konstruierte Punkt wirklich der Mittelpunkt der Strecke war.[61]

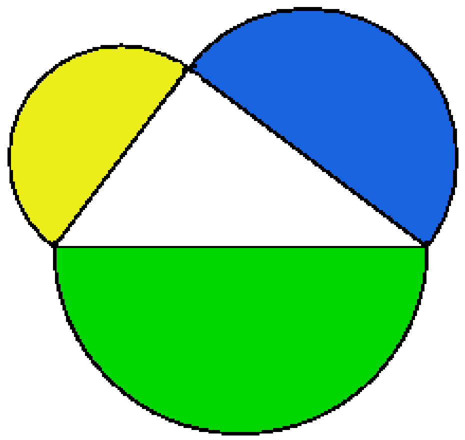


Abbildung 15: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Halbkreise über den Katheten gleich dem Halbkreis über der Hypotenuse

Hippokrates hat aber nicht nur Beiträge zur Systematik der Mathematik geleistet, sondern war auch abseits des Verfassens seiner „Elemente" recht produktiv: Er war der erste, der zeigen konnte, wie man durch *Kreislinien* begrenzte Figuren quadrieren kann. Hippokrates hat verschiedene Typen *Möndchen* quadriert. Eine seiner Möndchen Konstruktionen nutzt den Umstand aus, dass beim rechtwinkligen Dreieck die Summe der Halbkreise über den Katheten gleich dem Halbkreis über der Hypotenuse ist (s. Abb. 15). Klappt man nun den Halbkreis der Hypotenuse nach oben, so liegt das Dreieck innerhalb des Halbkreises (s. Abb. 16). Es werden nun der *Halbkreis über der Hypotenuse* und die *Summe der Halbkreise über den Katheten* jeweils um die *identische*, grau markierte Fläche vermindert. Es resultieren zwei Möndchen, die flächengleich zu einem rechtwinkligen Dreieck sind. Dieses Dreieck war einfach quadrierbar, der Weg zur *Quadratur der Möndchen* damit frei.

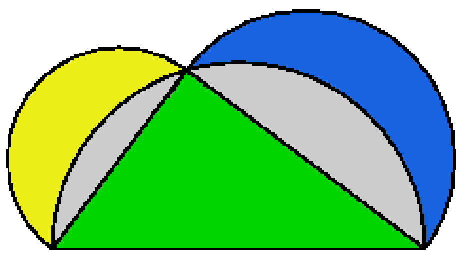


Abbildung 16: Die Summe der Möndchen (gelb und blau) ist gleich dem rechtwinkligen Dreieck

Hippokrates fand fünf verschiedene Typen quadrierbarer Möndchen (...). Die Entdeckung war so populär, daß eine entsprechende Schrift von Hippokrates teilweise überliefert worden ist. Dieses Fragment ist das älteste authentische Stück griechischer Mathematik.[62]

Hippokrates hoffte wohl, die Quadratur der Möndchen sei ein erster Schritt in Richtung *Quadratur des Kreises*. Diese Hoffnung hat sich so aber nicht erfüllt. Die Quadratur des Kreises erfolgte auf gänzlich anderen Wegen.

Wesentlich fruchtbarer war sein Beitrag zum *delischen Problem*: Zwar konnte er das delische Problem nicht lösen, aber Hippokrates zeigte, dass, wenn es gelingt zu einer Strecke mit der Länge ***a*** zwei *mittlere Proportionale* ***x*** und ***y*** zu finden, so dass $\mathbf{a : x = x : y = y : 2a}$, dass dann $\mathbf{x^3 = 2a^3}$ gilt. Ein Würfel mit einer solchen Basis-Länge ***x*** hat also das doppelte Volumen eines Würfels mit der Basis-Länge ***a***. Ein wertvoller Hinweis, den andere Geometer erfolgreich aufzugreifen wussten.

So knüpfen sowohl die hier weiter hinten dargestellte Lösung des *delischen Problems* durch Menaichmos, wie die (hier nicht näher diskutierte) Lösung des Archytas unmittelbar an dieses Resultat von Hippokrates an.

61 Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 99
62 Hans Wußing: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.Frankfurt: Harri Deutsch Verlag 2008. S. 47

Archytas von Tarent – Eine Ära geht zu Ende

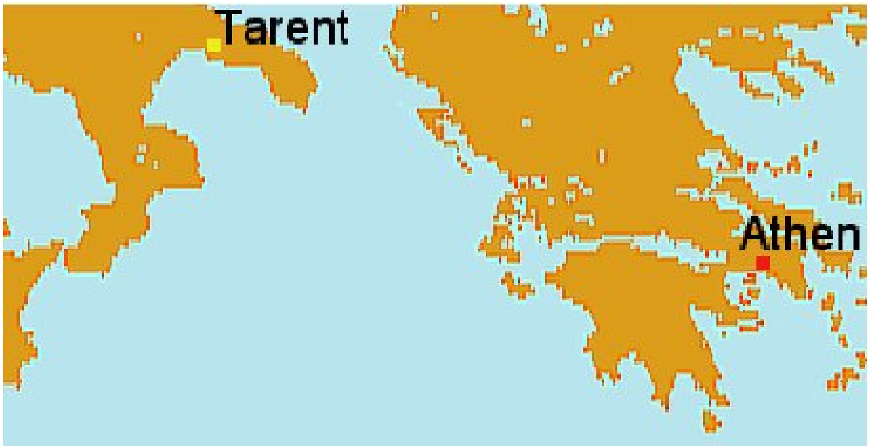


Abbildung 17: Tarent, die süditalienische Heimat von Archytas

Archytas (ca. 428 – 365 v.Chr.) ist der letzte bedeutende Mathematiker der ionischen Periode und zugleich der letzte bedeutende Pythagoreer (zumindest wenn man von Neu-Pythagoreern aus einer deutlich späteren Zeit absieht). Die Vielseitigkeit seiner Talente und Leistungen kann einen modernen Mitteleuropäer nur vor Neid erbleichen lassen:

> Die Vielseitigkeit dieses ausserordentlichen süditalienischen Doriers ist sogar für seine Zeit unerreicht. Er hat durch eine raffiniert ausgeklügelte stereometrische Konstruktion das berühmte Delische Problem, die Würfelverdoppelung, gelöst. Er hat nicht nur im Rahmen seiner Musiktheorie Sätze über Zahlenproportionen und Ungleichheiten über die drei Mittel (arithmetisches, geometrisches, harmonisches Mittel; NF) hergeleitet, sondern das ganze Buch VIII der *Elemente* mit seiner arithmetischen Theorie der stetigen Proportion, der ähnlichen Zahlen usw. ist grösstenteils sein Werk. Auch zur Theorie der irrationalen Größen (der inkommensurablen Größen; NF) hat er einen wichtigen Beitrag geliefert. Ptolemaios nennt ihn mit Recht den bedeutendsten pythagoreischen Musiktheoretiker, hat er doch nicht nur durch systematische Anwendung des arithmetischen und des harmonischen Mittels die Zahlenverhältnisse der neuen Tonleitern, die zu seiner Zeit Mode wurden, ausgerechnet, sondern er hat auch die zahlentheoretische Grundlage der Musiktheorie gelegt, die wir in der *Sectio canonis* des Eukleides finden. Auch über den Zusammenhang zwischen den Wissenschaften und über die physikalische Natur der Töne hat er nachgedacht. Er war nach Diogenes Laertius, Buch VIII, 79-83, der erste, der eine systematische Behandlung der Mechanik auf mathematischer Grundlage gab. Nach Vitruvius schrieb er über Maschinen, und er hat auch selbst Maschinen entworfen: eine fliegende Taube aus Holz und eine Rassel für Kinder. Er war sehr befreundet mit Platon, der hauptsächlich durch ihn in die exakten Wissenschaften und die Philosophie der Pythagoreer eingeweiht wurde. In seiner Vaterstadt Tarent war er als Staatsmann hoch angesehen: Sieben Jahre wurde er immer wieder zum Strategen (militärischen Befehlshaber; NF) gewählt, obwohl das Gesetz nur eine einjährige Amtszeit erlaubte, und er hat keine Schlacht verloren. Unter dem Deckmantel der Demokratie verstand er es, nachdem seine Freunde, die aristokratischen Pythagoreer, aus Italien vertrieben worden waren, eine halbautokratische Regierung aufrechtzuerhalten. Mit einem Brief an Dionysios, den Tyrannen von Syrakus, der Platon gefangenhielt, rettete er, wie man sagt, dessen Leben.[63]

Angesichts dieser Vielzahl an Talenten und des Umfangs seiner Leistungen ist es natürlich etwas riskant, wenn sich in der Moderne dann rein altphilologisch und religionswissenschaftlich vorgebildete Autoren aufmachen, um das Werk des Archytas neu zu erschließen. Und so scheiterte die erste Ausgabe von Diels *Fragmente der Vorsokratiker* dann eben auch beim Versuch, dem Leser die Lösung des Archytas zum delischen Problem zu erläutern.[64] Aber auch ein solches Multitalent wie Archytas hat seine Schwächen.

63 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 247f

64 Vgl. hierzu auch: Erwin Schrödinger: Die Natur und die Griechen. Hamburg. Rowohlt 1956. S. 59f [Ja, das ist jener Schrödinger mit der *Schrödinger-Gleichung* und dem Nobelpreis in Physik; schönes Büchlein zur Vorsokratik.]

Bei der Diskussion der technischen Qualität der von Archytas stammenden Beweise in Buch VIII der *Elemente* vergibt van der Waerden überaus schlechte Noten:

> Wir sehen also, dass ARCHYTAS in Buch VIII, wie in seinen anderen erhaltenen Fragmenten, fortwährend mit der Logik ringt, wie er sich die größte Mühe gibt, ihre strengen Forderungen zu erfüllen, jedoch ohne Erfolg. (...)
> Als ARISTOTELES die Regeln der Logik zusammenstellte, kodifizierte er damit die Regelmäßigkeiten, die er in den Schlüssen der Mathematiker und Philosophen antraf. Seine Beispiele entnimmt er grösstenteils den mathematischen Lehrbüchern seiner Zeit. Es dürfte klar sein, dass sich die mathematischen Lehrbücher in ihrer Logik nach dem Beispiel der Abhandlungen der grossen Mathematiker richten, nicht umgekehrt. Daraus folgt, dass das Denken der griechischen Mathematiker schon lange vor ARISTOTELES sehr strengen Anforderungen an Exaktheit genügt haben muss. Wir haben also in der mangelhaften Logik des ARCHYTAS ein ausgesprochen persönliches Merkmal dieses sonst so ausgezeichneten Mathematikers zu erblicken.[65]

Zurück zum *delischen Problem*: Auf die Schilderung der verwickelten geometrischen Konstruktion, mit der Archytas die Verdoppelung des Würfels gelingt, wird hier verzichtet. Es wird später die Lösung des delischen Problems von Menaichmos vorgestellt (eine weitere Lösung des delischen Problems stammt von Eudoxos, einem Schüler des Archytas).

Unabhängig von den Details der Ausführung ist an der Archytas Lösung interessant, dass sich der führende Pythagoreer der damaligen Zeit bei seinen Konstruktionen nicht durch das Ideal von *Zirkel und Lineal* beschränken lässt. Um zum Erfolg zu gelangen, greift Archytas auf geometrische Konstruktionen zurück, die *nicht* allein durch *Zirkel und Lineal* erzeugbar sind. Und Archytas steht mit dieser Haltung nicht allein dar. Eine allgemein akzeptierte, dogmatische Beschränkung auf *Zirkel und Lineal* als Konstruktionsmittel der Geometrie hat es offensichtlich damals nicht gegeben.

Es sind meist sogenannte *mechanische Konstruktionen*, mit denen man die bei Zirkel und Lineal vorhandenen Grenzen überschreitet. Man versetzt geometrische Objekte in Bewegung, läßt sie (eventuell vor dem Hintergrund anderer geometrischer Objekte) lineare Bewegungen ausführen oder sich um einen Punkt bzw. eine Achse drehen. Man betrachtet dabei zurückgelegte Bahnen, Schnittpunkte, Schnittlinien oder Schnittflächen. Solche *mechanische Konstruktionen* sind in der Antike das gängige Gegenstück zu den heute üblichen Definitionen geometrischer Objekte durch Gleichungen oder Funktionen.

Modern wissen wir, dass jeder, der beim Problem der Würfelverdopplung (oder einem anderen der drei klassischen Probleme) Erfolg haben will, gegen das Ideal der *allein* mit *Zirkel und Lineal* ausführbaren Konstruktionen verstoßen *muss*. In der Antike konnte man dies so deutlich nicht wissen. Und so sieht sich Platon, der sich als philosophischer Mentor der Mathematik versteht, (laut Plutarch) dazu aufgerufen, hier Kritik zu üben:

> Platon selbst tadelte die Leute um EUDOXOS und ARCHYTAS und MENAICHMOS, weil sie es unternommen hatten, die Würfelverdopplung auf mechanische Einrichtungen zurückzuführen, wie wenn es nicht möglich wäre, für den, der es ernsthaft versucht, rein theoretisch zwei mittlere Proportionale zu finden (zur Bedeutung der *mittleren Proportionale* beim delischen Problem, siehe den Abschnitt zu Hippokrates; NF). Dadurch wird nämlich das Gute an der Geometrie zugrunde gerichtet und zerstört, indem diese sich wieder zum Sinnlichen zurückwendet, statt sich nach oben zu erheben und die ewigen, unkörperlichen Bilder zu erfassen, bei denen verweilend Gott ewig Gott ist.[66]

Viel Pathos, aber *nur* mit *Zirkel und Lineal*, *ohne* mechanische Konstruktionen (oder ähnliche Tricks), lassen sich die gesuchten *mittleren Proportionalen* eben schlichtweg nicht bestimmen.

65 B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 255f

66 Plutarch: Quaestiones convivales. 8,2,1; 718. Zitiert nach B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 267f

Eudoxos von Knidos: Exhaustion und Proportionenlehre

Der Archytas-Schüler *Eudoxos* (ca. 408 – 347 v.Chr.) war der bedeutendste voreuklidische Mathematiker. Mit der Bezeichnung Mathematiker *allein* wird man den Leistungen des Eudoxos allerdings nicht ganz gerecht. Er eiferte in puncto Vielseitigkeit offensichtlich seinem Lehrer Archytas nach. Eudoxos besaß eine Ausbildung als Arzt, hat Beiträge zur Geografie verfasst, hat entscheidend an der Gesetzgebung seiner Heimatstadt Knidos mitgewirkt und schuf in der Astronomie das für die aristotelische Kosmologie grundlegende Modell der Bewegung der Himmelskörper (rotierende homozentrische Kugeln[67]). Er leitete in der am Marmarameer gelegenen Stadt Kyzikos eine wissenschaftliche Schule, wobei er sich als Philosoph, Astronom und Mathematiker profilierte. Später hat er einige Zeit an Platons Akademie in Athen verbracht und dort Platon (während dessen 2. Sizilien-Reisen) als Leiter der Akademie vertreten.[68] Eudoxos starb etwa 347 v.Chr. in seiner Geburtsstadt Knidos.

Abbildung 18: Die Wirkungsstätten des Eudoxos von Knidos

Obwohl er ein Schüler von Archytas war, ist Eudoxos kein Pythagoreer. Die ***1*** ist für ihn eine gewöhnliche natürliche Zahl und besitzt keinerlei Sonderstatus. Darüber hinaus ist Eudoxos, im Gegensatz zur pythagoreischen Tradition, kein Freund der Zahlenmystik. Auch ansonsten hielt er nichts von magischem Denken, Okkultem oder Mystischem.

> He was a *man of science* if there ever was one. No occult or superstitious lore appealed to him;[69]

Eudoxos und das Buch XII der Elemente

Nach antiken Quellen ist davon auszugehen, dass ein wesentlicher Teil der im Buch XII der *Elemente* vorgestellten Sätze ursprünglich von *Eudoxos* bewiesen wurde. Das Thema von Buch XII der Elemente lautet Stereometrie, handelt also von räumlichen Objekten. Es beschäftigt sich mit Pyramiden, Prismen, Zylindern, Kegeln und Kugeln.

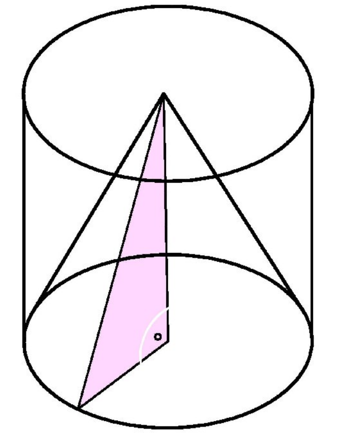


Abb. 19: Der Kegel hat ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders

Das Volumen des Kegels

Zu den in der Antike besonders gewürdigten Leistungen des *Eudoxos* gehört der Beweis zur Volumenbestimmung des Kegels: Der Kegel hat ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders (vgl. Abb. 19).

Wie wir von *Archimedes* (287 -212 v.Chr.) wissen, wurde die Tatsache, dass ein Kegel ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders hat, bereits von dem für seinen antiken Atomismus bekannten *Demokrit von Abdera* (ca. 460 - 370 v.Chr.) vermutet, aber eben erst von *Eudoxos* bewiesen.

Die antiken Griechen machten nicht nur bereits einen deutlichen Unterschied zwischen einer bloßen Vermutung und einem bewiesenen Satz, sondern sie

67 Siehe hierzu auch: *Eudoxos & Co. – Die Anfänge der wissenschaftlichen Astronomie* unter www.antike-griechische.de/Eudoxos.pdf

68 Dass Eudoxos Platon als Akademie-Leiter während einer von dessen Sizilien-Reisen vertreten hat, wird allerdings von einigen Autoren angezweifelt (vgl. z.B. Lasserre: Die Fragmente des Eudoxos von Knidos).

69 Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 323

wussten dabei auch die Bedeutung wegweisender Vermutungen zu würdigen. Siehe hierzu das folgende Archimedes Zitat:

> Das ist ein Grund, weshalb wir im Falle der Sätze, deren Beweis Eudoxus zuerst gefunden hat, nämlich daß der Kegel der dritte Teil des Zylinders und die Pyramide des Prismas ist, die dieselbe Grundfläche und Höhe haben, Demokrit keinen geringeren Anteil des Verdienstes zuerkennen müssen, der zuerst über die genannte Figur den Ausspruch getan hat, obwohl er ihn nicht bewiesen hat. (Brief von Archimedes an Eratosthenes) [70]

Die Exhaustionsmethode

Zu den Verdiensten von *Eudoxos* zählt auch, dass er die für die Mathematik so überaus wichtige Exhaustionsmethode entscheidend voran gebracht hat.[71]

In ihrer aller einfachsten Form besteht Exhaustion (Ausschöpfung) darin, dass man die Fläche bzw. das Volumen einer gegebenen Figur in endlich viele (berechenbare) Teilfiguren zerlegt und dann die Fläche bzw. das Volumen der Ausgangsfigur durch Addition der entsprechenden Werte der Teilfiguren ermittelt.

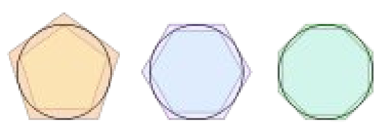


Abbildung 20: Die Bildung immer weiter verfeinerter Ober- und Untersummen am Beispiel des Kreises

Kann man eine Figur *nicht* vollständig in berechenbare Teilfiguren zerlegen, dann kann man aber (meist) wenigstens Ober- und Untersummen als brauchbare Näherungen an den gesuchten Werten bestimmen. So konnte man in der Antike schon früh einen Kreis von innen wie außen durch regelmäßige Polygone nähern. Dabei kann man zu immer höheren Polygonen übergehen und so sowohl mit Ober- wie Untersummen (den Flächen der äußeren wie inneren Polygone) die Kreisfläche immer besser nähern (s. Abb. 20). Eine solche Technik der Abschätzung durch Ober- unter Untersummen wird ebenfalls Exhaustionsmethode genannt. Archimedes hat so z.B. sehr brauchbare Abschätzungen für π gewonnen.

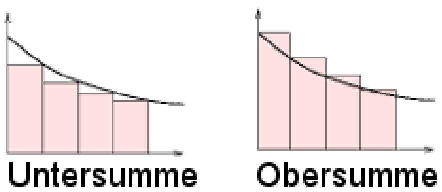


Abbildung 21: Typische Schemaskizze zur Ober- und Untersumme bei der Integration von Funktionen

[Ausgehend von der Idee der Ober- und Untersummen, kann man übrigens sehr schnell die Anfänge der Integralrechnung entwickeln. Man verfeinert die Ober- und Untersummen dabei nicht nur immer weiter, sondern bestimmt die *Grenzwerte* der Ober- und Untersummen. Existieren *Grenzwerte* für Ober- und Untersummen und stimmen sie überein, so ist dieser gemeinsame *Grenzwert* der gesuchte Wert: Die Fläche unter dem Funktionsgraphen. Jedoch: Bei allen Verdiensten der Antike, die Integralrechnung hat man dort aber noch nicht entwickelt. Dies Verdienst kommt Newton und Leibniz zu.]

Eudoxos kennt *keinen Grenzwertbegriff* und trotzdem ist es ihm gelungen, mit der Exhaustionsmethode *exakte* Lösungen und nicht nur Abschätzungen oder Näherungen zu bestimmen. Insbesondere hat er die Exhaustionsmethode beim Beweis zur Volumenformel für Kegel genutzt.

Im Anschluss an Demokrit vermutete er, dass der Kegel das Volumen von einem Drittel des umschreibenden Zylinders hat. Im bei Euklid überlieferten Beweis (Elemente,

70 Brief von Archimedes an Eratosthenes, zitiert nach: Károly Simonyi: Kulturgeschichte der Physik. Frankfurt am Main: Harri Deutsch Verlag, 3. Auflage, 2001. S. 96

71 Erste Ansätze zum mathematisch produktiven Einsatz der Exhaustionsmethode werden gern dem Sophisten Antiphon (einem Zeitgenossen von Sokrates) zugeschrieben. Zu dieser Zuschreibung vgl.: Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 221ff

Buch XII, Satz 10) wird diese Aussage zunächst umformuliert in: Der einschlägige Zylinder ist dreimal so groß wie der betrachtete Kegel. Dann wird (durch indirekten Beweis) gezeigt,

a) dass das Volumen des Zylinders nicht größer sein kann als 3 Kegel, da ansonsten bei der Betrachtung einschlägiger Ober- und Untersummen ein Widerspruch entstünde,
b) dass das Volumen des Zylinders nicht kleiner sein kann als 3 Kegel, da ansonsten bei der Betrachtung einschlägiger Ober- und Untersummen ebenfalls ein Widerspruch entstünde.

Also muss ein Zylinder das Volumen von *genau* drei Kegeln besitzen. Also besitzt ein Kegel ein Drittel des Volumens des umschreibenden Zylinders.

Diese Beweistechnik hat in der Antike großen Eindruck gemacht. Man kann mittels indirekter Beweise Betrachtungen zu Ober- und Untersummen dazu benutzen, um *exakte* Resultate zu erzielen. Archimedes entwickelt diese eudoxische Technik der Exhaustionsmethode später bis zur Perfektion. Archimedes konnte damals so Resultate erzielen, für die wir heute (für gewöhnlich) die Integralrechnung bemühen.

Mit dem Umstand, dass diese Beweistechnik des Eudoxos „Exhaustionsmethode“ genannt wird, sind aber nicht alle glücklich:

> Nach der Aussage von Archimedes war (…) Eudoxos der erste, der exakte Beweise für die zuerst von Demokrit von Abdera (460-371) durch atomistisch-heuristische Überlegungen gefundenen Sätze gab, wonach das Volumen einer Pyramide bzw. eines Kreiskegels ein Drittel des Volumens einer bzw. eines Kreiskegels ein Drittel des Volumens des über der gleichen Grundfläche mit gleicher Höhe errichteten Prismas bzw. Zylinders ist. Diese Sätze gingen in Buch XII der *Elemente* Euklids ein. Die Methode ihres indirekten Beweises (man zeigt, daß die beiden Annahmen, das Volumen sei kleiner oder größer als der behauptete Wert, auf Widersprüche führen) wurde später wenig glücklich als Exhaustionsmethode (Exhaustion svw. Ausschöpfung) bezeichnet, obwohl diese Bezeichnung viel eher auf die heuristische Methode des Demokrit zutrifft, der die zu berechnenden Körper von innen durch einen Körper aus vielen dünnen Scheiben annähert (ausschöpft).[72]

Ich finde die Bezeichnung *Exhaustionsmethode* hier nicht ganz so unglücklich, aber das ist Geschmackssache.

Die Proportionenlehre des Eudoxos

Die Proportionenlehre von *Eudoxos* kennen wir vor allen Dingen aus Buch V von *Euklids Elementen*.[73] Vor das Problem gestellt, dass die antike Arithmetik nicht ausdrucksstark genug war, um alle in der Geometrie konstruierbaren Größenverhältnisse beschreiben zu können, ersann *Eudoxos* die in den Elementen referierte Proportionenlehre. Sie soll Größenverhältnisse (Proportionen) auch dort noch erfassen können, wo die (antike) Arithmetik versagt. Die Proportionenlehre war die ganze Antike hindurch ein wichtiges Hilfsmittel.

> The anonymous author of a scholium (scholium = Randnotiz in einer antiken Handschrift; NF) to Euclid‘s Book V, who is perhaps Proclus, tells us that `some say‘ that this Book, containing the general theory of proportion which is equally appicable to geometry, arithmetic and all mathematical science, `is the discovery of Eudoxos, the teacher of Plato‘.[74]

72 Peter Schreiber: Euklid. BSB Teubner: Leipzig 1987. S. 18
73 Eine sehr knappe Zusammenfassung dieser Proportionenlehre findet man in *Euklid und die Elemente* unter www.antike-griechische.de/Euklid.pdf im Abschnitt zu Buch V der Elemente. Eine etwas ausführlichere Diskussion der Proportionenlehre findet man hier: http://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf
74 Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 325

Eudoxos hat also die Proportionentheorie entwickelt, um auch dann noch Größenverhältnisse (Proportionen) betrachten zu können, wenn diese sich nicht durch Quotienten natürlicher Zahlen (positive Bruchzahlen) beschreiben lassen. (Die Details dieser sehr abstrakten Theorie werden hier übergangen.)

Heute verwenden wir in solchen Fällen irrationale Zahlen (Beispiele dafür sind $\sqrt{2}$ oder die Zahl π , das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser). Irrationale Zahlen sind reelle Zahlen, die sich nicht als der Quotient aus einer natürlichen und einer ganzen Zahl darstellen lassen (die also *keine* Bruchzahlen sind). Irrationale Zahlen haben eine niemals endende, niemals periodisch werdende Dezimalbruchentwicklung und waren in der Antike *unbekannt*.

Die Proportionenlehre des Eudoxos ist nicht so leistungsstark wie ein voll ausgereiftes Konzept der reellen Zahlen (unter Einschluss der irrationalen Zahlen). Sie reichte aber aus, um eine geometrische Ähnlichkeitslehre zu entwickeln. *Euklid* stellt in Buch VI der *Elemente* eine auf der Proportionenlehre des *Eudoxos* fußende Ähnlichkeitslehre vor. Ähnlich heißen dabei zwei Figuren dann, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen und die jeweils gleiche Winkel umfassenden Seiten dasselbe *Größenverhältnis* aufweisen (wenn diese Seiten in *Proportion* stehen, so die antike Formulierung).

Eine grundlegende Sanierung der in der Antike wahrgenommenen begrenzten Ausdrucksstärke der Arithmetik findet erst im 19. Jahrhundert statt (siehe Dedekindsche Schnitte). Nun werden endlich auch *irrationale Zahlen* auf ein sicheres Fundament gestellt.

Auch wenn *Eudoxos* die Leistung *Dedekinds* nicht ganz erreichte, so verwendet er bei seiner Proportionenlehre doch erstaunlich modern wirkende Definitionen:

> Man sagt, daß Größen **in demselben Verhältnis** stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;
>
> Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen **in Proportion stehend** heißen; (Euklid: Elemente. Buch V, Definitionen)[75]

In Kommentierung dieser Stelle schreibt H. Wußing:

> Diese Definition der Proportion benötigt ersichtlich keinerlei Voraussetzungen über die Kommensurabilität der Größen. Zugleich ist sie geeignet, alle bekannten Sätze über Proportionen beweisen zu können, eine Leistung, die es gestattet, die Verbindung zwischen der geometrischen Algebra, der Proportionenlehre, der Ähnlichkeitslehre einerseits und einer das Inkommensurable, Irrationale umfassenden Größenlehre andererseits in mathematisch korrekter Weise herzustellen. Doch war es noch ein weiter Weg bis zum Begriff der Irrationalzahl.[76]

Zum Abschluss dieses Abschnitts noch eine Bemerkung: Im Zusammenhang mit Eudoxos taucht immer wieder die Frage auf, ob man das sogenannte archimedische Axiom nicht eigentlich in *Axiom des Eudoxos* umbenennen müsste. Nun, Eudoxos hat das sogenannte *archimedische Axiom* unzweifelhaft schon benutzt, aber wahrscheinlich war auch er nicht der erste.[77] Wollen wir denn wirklich die mathematischen Bezeichnungen solcher altehrwürdigen Konzepte stets an den aktuellen Stand der mathematik-historischen Forschung anpassen?

Man sollte andere Mittel und Wege finden können, um dem Genie des Eudoxos jene Würdigung zuteil werden zu lassen, die es unzweifelhaft verdient.

75 Euklid: Die Elemente. Hrsg. u. übersetzt von Clemens Thaer. Frankfurt a.M.: Harri Deutsch, 3. Aufl. 1997, S. 91
76 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 185
77 Vgl. Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 115f

Theaitetos von Athen: Quadratische Irrationalitäten und reguläre Polyeder

Der zweite bedeutende Mathematiker der athenischen Periode, Theaitetos (ca. 415 – 369 v.Chr.), ist, wie Eudoxos auch, an der Akademie tätig. Der dort als Platon Liebling hofierte Theaitetos ist für den Großteil des Inhalts von Buch X der *Elemente* verantwortlich. Theaitetos vertieft hier das Thema Inkommensurabilität. Da, modern gesehen, Inkommensurabilitäten immer dann entstehen, wenn Größenverhältnisse nur mittels irrationaler Zahlen beschreibbar sind, spricht man hier auch gern von der durch Theaitetos vorgenommenen *Klassifikation der Irrationalitäten*. Und da bei dieser Klassifikation das *Quadrat* eine ganz besondere Rolle spielt, ist auch *quadratische Irrationalitäten* eine gängige Charakterisierung von Buch X. Buch X umfasst ca. ¼ des Gesamtvolumens der *Elemente*. Daneben ist Theaitetos auch noch für große Teile von Buch XIII der *Elemente* verantwortlich. Dieses beschäftigt sich hauptsächlich mit regulären Polyedern (platonischen Körpern).

> Neben Eudoxos ist vor allem der ebenfalls hoch begabte Theaitetos (...) zu erwähnen, dem Platon einen eigenen Dialog widmete. Zu seinen Schöpfungen gehört eine systematische Konstruktion der quadratischen Irrationalitäten (Elemente X) und darauf gestützt, der Existenzbeweis der fünf regelmäßigen (oder platonischen) Körper (Elemente XIII, wo auch nachgewiesen wird, daß es nicht mehr als fünf dieser Körper geben kann).[78]

Es ist schwierig eine bessere, knappe und dabei noch verständliche Charakterisierung des Inhalts von Buch X der Elemente als *quadratische Irrationalitäten* zu finden. Das Vorgehen von Theaitetos wird im *Lexikon bedeutender Mathematiker* wie folgt charakterisiert:

> Er wählte eine feste Ausgangsstrecke und unterteilt alle Strecken in solche, die mit ihr kommensurarabel und solche, die mit ihr inkommensurabel sind. Letztere zerfallen in die, die Seite eines Quadrates sind, dessen Inhalt (...) ganzzahlig Vielfaches des Quadrats der Ausgangsstrecke ist (diese heißen in der 2. Potenz kommensurabel), und jene die dieser Bedingung nicht genügen.
>
> Die Einteilung wurde auf Kubikwurzeln nichtkubischer natürlicher Zahlen übertragen. Theaitetos bewies die Irrationalität der Quadratwurzel aus nichtquadratischen Zahlen und klassifizierte einige auch dem Quadrat nach inkommensurable Größen nach verschiedenen mittleren Proportionalen was u.a. auf Ausdrücke der Gestalt $\sqrt{a\cdot\sqrt{b}},\ a\cdot\sqrt{b}-b\cdot\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{b}}$ führte.[79]

Vielleicht hilft ergänzend die Kurzcharakteristik von Heath. Er beschreibt das von Theaitetos stammende Buch X der Elemente wie folgt:

> Book X is perhaps the most remarkable, as it is the most perfekt in form, of all the Books of the *Elements*. It deals with irrationals, that is to say, irrational straight lines in relation to any particular straight line assumed as rational, and it investigates every possible variety of straight lines which can be represented by $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, where *a*, *b* are two commensurable lines.[80]

Beim anschaulich wesentlich besser zugänglichen Thema *Platonische Körper* ist Theaitetos vor allem für die Sätze zu Oktaeder und Ikosaeder verantwortlich. Höchst wahrscheinlich hat erst Theaitetos diese beiden Körper entdeckt. Die anderen regulären Polyeder (Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder) waren bereits von den Pythagoreern untersucht worden. Vielleicht hat sich Theaitetos speziell durch seine Arbeiten zu regulären Polyedern das auffällige Wohlwollen Platons erworben.[81] Der Satz, dass es nur fünf reguläre Polyeder gibt, stammt übrigens ebenfalls von Theaitetos. Dieses Resultat wird später von Euklid – als letztem Satz der *Elemente* – zum Schlusspunkt seines Lehrtextes auserkoren.

---

78 C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Heidelberg New York: Springer Verlag 2003. S. 39

79 Aus dem Eintrag *Theaitetos* im *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Bibliographisches Institut, Leipzig 1990

80 Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. S. 402

81 Platon war von regulären Polyedern fasziniert und hat ihnen in seiner Naturphilosophie eine besondere Rolle zugewiesen. Deswegen werden die *regulären Polyeder* heutzutage auch gern als *Platonische Körper* bezeichnet.

Euklid und die gemiedenen Lösungen klassischer Probleme

Euklid von Alexandria systematisierte den Großteil der in der ionischen und athenischen Periode gefundenen Resultate und schuf so seine *Elemente*.[82] Natürlich war das Spektrum dieser Resultate viel umfangreicher als die etwa 2 bis 3 Dutzend Sätze, die hier als Beispiele für die Herausbildung der beweisenden Mathematik erwähnt wurden. Euklids Elemente präsentieren immerhin mehr als 450 Sätze.

Am beeindruckendsten an Euklids Elementen ist aber nicht ihr Umfang, sondern die Systematik. Auch wenn es richtig ist, dass Euklid immer mal wieder größere Teile anderer Manuskripte beinahe unverändert in seine Elemente übernommen hat, so gibt es doch zumindest beim Thema Planimetrie (die Geometrie der Ebene und ebener Figuren) eine beeindruckende Systematik.

Euklid legt in seinen Elementen den Grundstein für das Konzept der axiomatischen Methode in der Mathematik. Und er entscheidet sich dabei dafür, in den geometrischen Beweisen nur Konstruktionen mit *Zirkel und Lineal* zuzulassen.

In der systematischen Grundlegung seiner Geometrie verwendet Euklid fünf Postulate. Die Postulate 1 – 3 übersetzen dabei den Gedanken der *mit Zirkel und Lineal durchführbaren Konstruktionen* in Formulierungen einer antiken Axiomatik:[83]

> Gefordert soll sein:
>
> 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
>
> 2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
>
> 3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,[84]

Da die Klasse der durchführbaren Konstruktionen nicht durch die Einführung weiterer Postulate vergrößert wird,[85] dürfen in den geometrischen Beweisen von Euklids *Elementen* nur mit *Zirkel und Lineal* durchführbare Konstruktionen verwendet werden.

Die zulässigen Hilfsmittel Zirkel und Lineal sind dabei natürlich *ideale* Gerätschaften. Von den üblichen Beschränkungen entsprechender Gerätschaften aus dem Schreibwarenladen sind sie befreit. Der Zirkel, der bei Euklid gemeint ist, kennt keinen kleinstmöglichen und größtmöglichen Radius. Ebenso sind die geraden Linien, die man mit dem Lineal ziehen kann, in ihrer Länge nicht beschränkt.

Die Sprechweise *„ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar“* kann bei Bezug auf Euklids Elemente als Metapher für *„es werden bei der Konstruktion nur Objekte gemäß den Postulaten 1 – 3 als konstruierbar (bzw. existent) vorausgesetzt“* verstanden werden.

Weil Euklid die Wahl seiner Postulate am Ideal der allein *mit Zirkel und Lineal* durchführbaren Konstruktionen orientiert, konnte er die Resultate zu den drei klassischen geometrischen Problemen der Antike ***nicht*** in seine *Elemente* aufnehmen. Die dort gefundenen Lösungen kommen nämlich in ihren Konstruktionen *nicht* mit *Zirkel und Lineal* aus.

War Euklid Fan eines *Zirkel-und-Lineal Purismus* wie Platon? Das kann durchaus sein. Vielleicht wollte er aber auch einfach *ausschließlich* jene Resultate in seine Elemente aufnehmen, bei denen es *keine* Kontroversen zur eingesetzten Beweistechnik gab. Bei einem Standard-Lehrtext, wie Euklid ihn wohl von Anfang an verfassen wollte, ist so etwas ja überaus sinnvoll. Zumindest hat es den *Elementen* nicht geschadet.

---

82 Euklid selbst hat zu seinen *Elementen* nur wenige neue Sätze beigesteuert. Er dürfte aber mehr als einmal dazu gezwungen gewesen sein, zu den Sätzen neue, zu seiner Systematik passende Beweise zu entwickeln.

83 Die von Euklid gepflegte Unterscheidung zwischen *Axiomen* und *Postulaten* spielt heutzutage keine Rolle mehr.

84 Euklid: Die Elemente. Hrsg. u. Übersetzer: Clemens Thaer. Frankfurt a.M.: Harri Deutsch, 3. Aufl. 1997. S. 2

85 Das Postulat 4 verlangt, dass alle rechten Winkel einander gleich sind, das 5. und letzte Postulat ist das berühmte Parallelenaxiom. Die unter der Rubrik „Axiome“ aufgeführten Voraussetzungen sind vorwiegend allgemeine logische Grundannahmen und haben mit Ausnahme von Axiom 7 und 9 (Was einander deckt ist einander gleich. / Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.) keinen speziellen geometrischen Bezug.

Hippias von Elis: Die Dreiteilung des Winkels mittels Quadratrix

Hippias von Elis (um 400 v. Chr.) gehörte, wie Hippokrates von Chios, zur Gruppe der mathematisch produktiven Sophisten.

> Hippias, einer der jüngeren Sophisten (wesentlich jünger als Protagoras, daher wohl kaum vor 460 geboren), ist als Gesandter seiner Heimatstadt in anderen griechischen Staaten, so insbesondere in Sparta, tätig gewesen, hat bei solchen und anderen Gelegenheiten auch vielbewunderte Vorträge gehalten, durch die er nicht nur in Olympia, sondern sogar in entlegenen Städtchen Siziliens erstaunliche Honorare verdient hat. Hippias ist der typische Enzyklopädist unter den Sophisten – der auch die mathematischen Wissenschaften seinem Lehrprogramm eingliedert. Scheint er doch bereits den unersetzlichen pädagogischen Wert der Mathematik erkannt zu haben (...)[86]

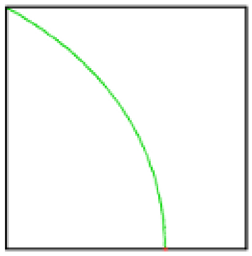


Abbildung 22: Die Quadratrix (grün)

Wenn heute jemand der Name *Hippias von Elis* noch geläufig ist, dann meist wegen der beiden nach ihm benannten Platon Dialoge. Hier hat der Sophisten-Feind Platon seiner Phantasie freien Lauf gelassen und gestaltet seine *Figur* Hippias als einen Widerling, der einem Sokrates natürlich nicht das Wasser reichen kann.[87] In der Mathematik-Geschichte hingegen wird dem *historischen* Hippias wegen seines Geniestreichs *Quadratrix* ein ehrendes Andenken bewahrt (siehe Abb. 22). Die Kurve löst nicht nur das Problem der Dreiteilung aller Winkel von 0° bis 90°, sondern die Kurve kann auch zur Quadratur des Kreises benutzt werden (daher auch die Bezeichnung).

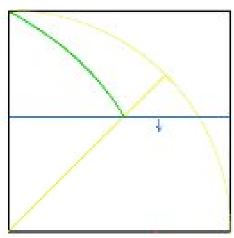


Abbildung 23: Definition der Quadratrix durch zwei gleichzeitige Bewegungen. Die Schnittpunkte der bewegten Seiten liefern die Punkte der Kurve

Die Kurve ist bewegungsgeometrisch definiert. Zwei bewegte Strecken erzeugen die Punkte der Kurve als Schnittpunkte (s. Zitat u. Abb. 23):

> Für die Teilung des Winkels in *n* gleiche Teile erdachte sich Hippias von Elis eine Kurve, die später den Namen \`Quadratrix‘ erhielt, weil sie auch das Problem der Kreisquadratur beantwortet. (...) Dennoch ist sie leicht beschreibbar, da sie durch zwei einfache Bewegungen erzeugt wird. Man denke sich ein Quadrat, dessen obere Seite sich parallel zur Ausgangslage mit konstanter Geschwindigkeit zur unteren hinbewegt. In der gleichen Zeit drehe sich die linke Quadratseite um den unteren linken Eckpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn derart, daß die beiden Bewegungen zugleich beginnen und zugleich enden.[88]

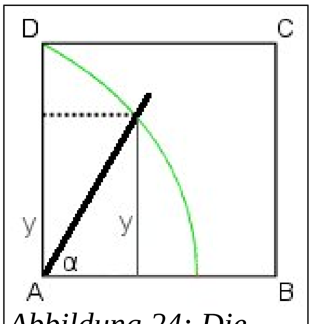


Abbildung 24: Die Zuordnung zwischen Winkeln und Strecken mittels Quadratrix

Will man einen Winkel α (mit 0°< α <=90°) dritteln, so legt man den Winkel an die Strecke AB im Punkt A (nach oben) an und bestimmt den Schnittpunkt mit der Quadratrix (siehe Abb. 24). Von dort aus fällt man das Lot auf die Strecke AB. Die Länge solcher Strecken ist (dank der Konstruktion der Quadratrix) proportional zum Winkel α. M.a.W. Winkel können durch die Quadratrix in proportionale Strecken übersetzt werden. Zur Winkel-Dreiteilung drittelt man die abgelesene Strecke und bestimmt wiederum mittels Quadratrix den zu dieser gedrittelten Strecke zugehörigen Winkel und hat so α/3 ermittelt.

Da die antike Geometrie alle notwendigen Hilfsmittel zur Drittelung von Strecken bereit hielt, war das lästige Problem der Winkel-Dreiteilung damit endlich gelöst. Einfach und genial: So wie gute Lösungen eben sind.

---

86 Wilhelm Capelle: Die Vorsokratiker. Stuttgart. Kröner Verlag 1968. S. 370

87 Im Dialog *Protagoras* zeigt Platon etwas mehr Respekt vor dem in ganz Griechenland hoch angesehenen *Hippias*. Zumindest wird die Figur Hippias hier nicht als bloß peinliche Witzfigur angelegt.

88 C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Heidelberg New York: Springer Verlag 2003. S. 44f

Menaichmos: Die Verdopplung des Würfels

Der Eudoxos Schüler Menaichmos (um 350 v.Chr.) benutzt bei seiner Lösung des delischen Problems das schon von Hippokrates gefundene Resultat. Zur Erinnerung:

> Hippokrates zeigte, dass wenn es gelingt zu einer Strecke mit der Länge ***a*** zwei *mittlere Proportionale* ***x*** und ***y*** zu finden, so dass **a : x = x : y = y : 2a**, dass dann $\mathbf{x^3 = 2a^3}$ gilt. Ein Würfel mit einer solchen Basis-Länge ***x*** hat also das doppelte Volumen eines Würfels mit der Basis-Länge ***a***.

Modern sehen wir auf Anhieb, dass $x = 2^{1/3} \bullet a$ und $y = 2^{2/3} \bullet a$ sein muss. Wir formulieren die Lösung dabei ganz selbstverständlich mit *irrationalen* Zahlen. So etwas kannte man in der Antike nicht. Man suchte in der Antike nach einer *geometrischen* Lösung.

Dementsprechend fand Menaichmos das gesuchte ***x*** als Schnittpunkt zweier Kurven. Zu den Grundzügen seiner Konstruktionen erhalten wir einige Hinweise beim antiken Kommentator Eutokios. Wenn wir zusätzlich ausnutzen, dass die Griechen gute Mathematiker waren, das sachliche Problem analysieren und dabei berücksichtigen, was an mathematischer Theorie damals zur Verfügung stand, dann ergibt sich daraus eine ziemlich überzeugende Deutung des Vorgehens. Sie soll hier kurz vorgestellt werden.

Um das Ganze etwas übersichtlicher zu machen, betrachten wir nur den Spezialfall, dass der Einheitswürfel (ein Würfel mit der Kantenlänge und dem Volumen 1) verdoppelt werden soll. Der Ansatz des Hippokrates vereinfacht sich dann zu **1 : x = x : y = y : 2 .** Es lassen sich daraus drei Gleichungen ableiten: $x^2=y$, $y^2=2x$, $xy=2$

Solche Funktionsgleichungen kannte man in der Antike in dieser Form natürlich nicht. Wir können diesen Gleichungen aber jeweils eine geometrische Deutung geben, die den antiken Griechen durchaus zugänglich war:

Gleichung	**geometrische Deutung**	**Funktionsvorschrift**
$x^2=y$	Bestimme zu allen Quadraten, ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 1 misst	$y=f_1(x)= x^2$
$y^2=2x$	Bestimme zu allen Rechtecken, deren eine Seite 2 misst, ein flächengleiches Quadrat	$y=f_2(x)= \sqrt{2x}$
$xy=2$	Bestimme alle Rechtecke mit dem Flächeninhalt 2	$y=f_3(x)= 2/x$

Zu jeder dieser geometrischen Deutungen verfügten die Griechen über das passende geometrische Konstruktionsverfahren, so dass sie zu jedem (geometrisch) gegebenem x den zugehörigen Funktionswert y geometrisch bestimmen konnten. Es war also naheliegend, die drei Graphen (zu den modern durch die Funktionsvorschriften $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ identifizierten Objekten) als geometrisch *wohl definiert* zu betrachten.

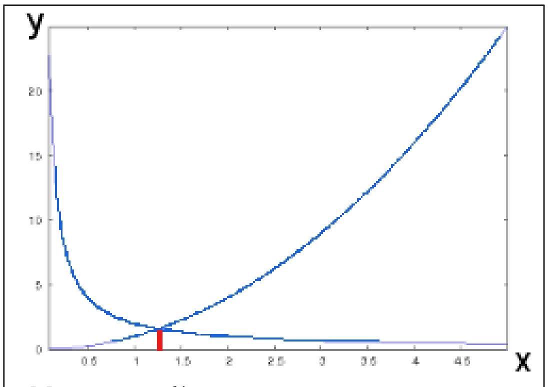


Abb. 25: $x= 2^{1/3}$ *am Schnittpunkt von* f_1 *,* f_3

Unsere moderne Gleichungstheorie sagt uns, dass jede dieser drei Gleichungen von den beiden anderen abhängig ist. Sind also zwei der drei Gleichungen erfüllt, so ist auch die dritte erfüllt. Es reicht folglich, die Lösungsgraphen zweier Gleichungen zum Schnitt zu bringen und man hat ***x*** und ***y*** bestimmt. (Der ***x*** Wert liefert dann die gesuchte Basis für einen Würfel mit dem Volumen 2.) Die einzige offene Frage scheint jetzt nur noch zu sein, welche zwei der drei Graphen Menaichmos zum Schnitt brachte. In der Abb 25 werden f_1 und f_3 verwendet. Menaichmos hat zwei der drei hier möglichen Lösungsansätze gefunden und beschrieben (namentlich: f_1 , f_3 wie f_2 , f_3).

Deinostratos: Die Quadratur des Kreises mittels Quadratrix

Deinostratos (um 350 v.Chr.), einem Bruder des Menaichmos, kommt höchst wahrscheinlich das Verdienst zu, als erster erkannt zu haben, dass man die Quadratrix-Kurve des Hippias auch zur Quadratur des Kreises benutzen kann.

Wir werden hier nur das Problem der *Quadratur des Einheitskreises* (Radius = 1) diskutieren. Hierzu konstruieren wir die Qudratrix-Kurve im Einheitsquadrat (Basis = 1). Der durch die Quadratrix definierbare Punkt S (s. Abb. 26) hat im Einheitsquadrat einen Abstand von 1/(π/2) von A. Es gilt also ***AS = 1/(π/2)***. Das ist die Schlüssel-Eigenschaft zur Quadratur des Kreises.

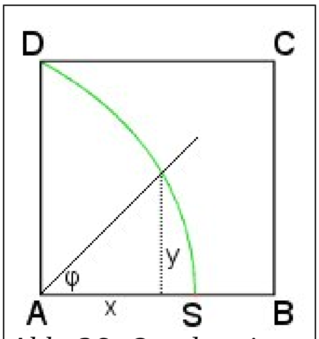


Abb. 26: Quadratrix im Einheitsquadrat

Der Nachweis dieser Eigenschaft muss jedoch mit dem Problem kämpfen, dass der Punkt S nicht Teil der Quadratrix-Kurve ist. Auf der Strecke AB ergibt sich bei der bewegungsgeometrischen Definition der Kurve nämlich *kein* Schnittpunkt! Die beiden in Bewegung versetzten Seiten fallen am Ende ihrer Bewegungen schlichtweg zusammen. Trotzdem lässt sich der Punkt S durch die Quadratrix definieren, allerdings nur im Sinne einer *stetigen Ergänzung* der Quadratrix. Angesichts dieses Umstands macht es m.E. wenig Sinn, nach einem korrekten *antiken* Beweis hierzu Ausschau zu halten. Da wurde zwangsläufig gemogelt. Wir halten einfach fest: Das, was wir modern durch ***AS = 1/(π/2)*** ausdrücken, diente als Hilfssatz bei der Quadratur des Kreises. Mit heutiger Analysis (und in Anlehnung an H. Gericke[89]) lässt sich dieser Hilfssatz wie folgt beweisen (vgl. Abb.26): Wir betrachten das Einheitsquadrat. Also ist BC = 1. Da y proportional zu φ ist und bei φ=π/2 offensichtlich y=1 gilt, ergibt sich:

$$y = \frac{1}{\pi/2} \cdot \varphi$$

Ferner ist $$x = \frac{y}{\tan\varphi} = \frac{1}{\pi/2} \cdot \frac{\varphi}{\tan\varphi}$$

Also $$AS = \lim_{\varphi \to 0} x = \frac{1}{\pi/2}$$

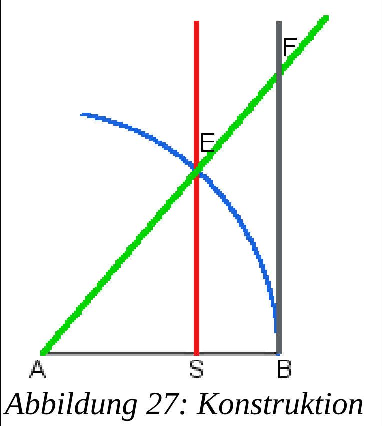


Abbildung 27: Konstruktion der Strecke π/2

Mittels des 2. Strahlensatzes kann man nun zeigen, dass die Strecke AF genau π/2 misst (vgl. Abb. 27). Man errichtet die Lotrechten über den Punkten S und B, schlägt um A den Einheitskreis und bestimmt dessen Schnittpunkt E mit der Lotrechten über S. Die Strecke AE verlängert man nun bis sie die Lotrechte über B schneidet (Punkt F).

Es gilt nun: AF:AE = AB : AS (2. Strahlensatz),
da AB = AE = 1 folgt AF = 1 **:** AS = π/2

Damit ist AF die Seite des Quadrats, das wie der Einheitskreis den Umfang ***2π*** hat. Jetzt ist es nur noch ein kleiner Schritt zur Konstruktion eines flächengleichen Quadrats. Errichtet man über einer Seite mit der Länge ***2π*** ein Dreieck mit der Höhe ***1***, so hat dies (wie man *modern* einfach nachrechnen kann[90]) die Fläche des Einheitskreises! Ein solches Dreieck war leicht zu quadrieren. Das Problem ist (wenn auch *nicht* allein mit Zirkel und Lineal) gelöst.

89 vgl.: Helmuth Gericke: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Wiesbaden: Matrix Verlag 2005. S. 92
90 In der athenischen Periode war der Nachweis der Flächengleichheit etwas delikater. Der damals *anscheinend* mit herangezogene Satz: Wenn *Seite = Kreisumfang* und *zugehörige Höhe = Radius*, dann *Dreiecksfläche = Kreisfläche*, wurde erst deutlich später (nämlich von Archimedes) bewiesen. „Offenbar kannte Deinostratos den Satz, den Archimedes später streng bewiesen hat (…) oder einen damit gleichwertigen Satz.“ B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Bd. 1. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. S. 317

Die Stellung der Mathematik als Bildungs- und Kulturgut

Die Entwicklung der beweisenden Mathematik und insbesondere der beweisenden Geometrie hat die griechische Kultur bereits im 5. Jahrhundert v.Chr. deutlich geprägt. Im 4. Jahrhundert v.Chr. steigt die *Geometrie* zur gepriesenen *Schule des Verstandes* auf. Die Auseinandersetzung mit den Methoden, Problemen und Resultaten der *beweisenden Geometrie* wird ein zunehmend selbstverständlicher Teil der gehobenen Bildung.

Eine Einführung in die Mathematik (insbesondere in die Geometrie) gehörte im Athen des 4. Jh. v.Chr. zum Lehrstoff für „Gymnasiasten".[91] Wer an weitergehendem Unterricht interessiert war, der musste sich an einen Sophisten wenden oder einen der Orte des Wissens wie Philosophenschulen oder (ab 300 v.Chr.) das Museion aufsuchen.

Dass die beweisende Mathematik nun als zentrales Kulturgut gilt, drückt sich auch im hohen Ansehen aus, das bedeutende Mathematiker genießen. Die wichtigen Mathematiker gehörten dabei entweder zur vielfältig gegliederten Gruppe der Gentleman-Gelehrten oder zur ebenso heterogenen Gruppe der Sophisten. Die griechische Mathematik wurde nicht von einer kleinen abgegrenzten Gruppe ansonsten kulturell inaktiver Berufsmathematiker geschaffen, sondern von einer breit gebildeten kulturellen Elite, die neben der Mathematik auch viele andere Bereiche des Geisteslebens prägte. Ja, häufig waren die bedeutenden Mathematiker zugleich auch politisch einflussreiche Gestalten. Ein Faktum, dessen heutige Befremdlichkeit deutlich macht, wie gänzlich anders damals Mathematik in der Kultur verankert war.

Die Entstehung der beweisenden Mathematik hat zu einer erheblichen Neuorientierung im Bereich Bildung geführt. Wer ein kluger Kopf werden wollte, der musste seinen Verstand zunächst einmal an geometrischen Beweisen schulen. Wer als gebildet gelten wollte, sorgte besser dafür, dass er mit den neuen Resultaten in der Mathematik Schritt hielt und den Stand der Dinge kannte. Wer mit seinen Geisteskräften beeindrucken wollte, für den bot die Mathematik ein Betätigungsfeld, auf dem man sich Anerkennung, Lorbeeren, ja selbst unsterblichen Ruhm erwerben konnte. Dem bereits im 4. Jahrhundert zur Legende verklärten Thales wurde der unsterbliche Ruhm nicht zuletzt wegen der ihm nachgesagten mathematischen Leistungen zuteil. Wenn Demokrit, eine Schlüsselgestalt des antiken Atomismus, seine Geisteskräfte betonen wollte, dann verwies er darauf, dass ihm in der Geometrie so schnell keiner etwas vormache.

Der ionische Naturphilosoph Anaxagoras, dem man in Athen den Prozess machte, weil er die Göttlichkeit der Sonne in Abrede stellte, nutzte seinen Aufenthalt im Gefängnis sinnvoll: Er dachte über die Quadratur des Kreises nach. Jenes Problem, das Aristophanes in seiner Komödie *Die Vögel* in einem seiner Scherze einfließen ließ.[92] Einzelne Beweise wurden ebenso wie Fragen nach der Zulässigkeit bestimmter Beweistechniken von prominenten Größen der Antike kontrovers diskutiert.

Man konnte mit seinem sophistischen Rhetorik-Lehrer nicht nur die Ilias des Homer, sondern auch die Probleme der Kreis-Quadratur diskutieren. An Platons Akademie galt eine solide Kenntnis der Mathematik als gleichermaßen unerlässlich wie selbstverständlich. Wer sich nicht mit dem Phänomen der inkommensurablen Strecken beschäftigt hatte, den nannte Platon einen *erbärmlichen Wicht*. Ein auf die Themen des Feuilletons verkürzter Bildungsbegriff war damals offensichtlich nicht die vorherrschende Mode.

Es ist zu ergänzen, dass es auch jene gab, die sich bei der Betonung des pädagogischen Werts der Geometrie eher abseits hielten, oder dieser sogar ablehnend gegenüber standen. *Sokrates* z.B. gehörte zu jenen, die keine hohe Meinung von der Geometrie hatten:

91 Siehe hierzu z.B. den Abschnitt *Mathematics in Greek education* in: Thomas Heath: A History of Greek Mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981. (S. 18ff)

92 Man sollte aber deswegen nicht unterstellen, dass das Athener Publikum der Aristophanes Komödien in seiner Majorität über eine gehobene geometrische Bildung verfügte. Man musste nur wissen, dass es das Problem der Kreis-Quadratur gab, und dass es als schwierig galt, um den Scherz zu verstehen.

> Er (Sokrates; NF) setzte auch auseinander, bis zu welchem Grad ein wahrhaft gebildeter Mann jede Sache kennen müsse. Die Geometrie z.B. müsse man nur so weit lernen, bis man imstande sei, nötigenfalls ein Stück Land bei der Übernahme oder Übergabe richtig zu vermessen, bis man richtig verteilen und von einer Landvermessung Rechenschaft ablegen könne. Dies sei aber so leicht zu lernen, daß man nach aufmerksamer Teilnahme am Meßgeschäft die Größe eines Grundstückes bestimmen und die Art des Messens sich aneignen könne. Er sprach sich gegen das Erlernen der schwer verständlichen Figuren aus. Er könne nicht einsehen, was das für einen Sinn habe. Indessen war er selber dieser Wissenschaft nicht unkundig. Er äußerte sich aber dahin, daß die Beschäftigung mit ihr ausreiche, um das Leben eines Menschen ganz in Beschlag zu nehmen und von vielen anderen nützlichen Kenntnissen abzuhalten. (Xenophon: Memorabilien. IV, 7, 2-3)[93]

Man muss die hier von Xenophon dem Sokrates zugeschriebene Position *nicht* unbedingt so lesen, dass Sokrates geometrische Kenntnisse wegen ihres (vermeintlich) geringen praktischen Nutzens für überflüssig hielt. Praktische Fragen standen nicht so sehr im Mittelpunkt des Denkens von Sokrates. Entsprechend vermuten etliche Sokrates Interpreten auch gänzlich andere Gründe hinter der (als historisches Faktum geltenden) Geringschätzung der Geometrie. Zieht man einige weitere Literaturstellen hinzu, dann lässt sich zur Geringschätzung der Geometrie auch folgende Deutung vertreten:

> Sokrates gibt an, daß die von ihm kritisierten Wissensformen der Prüfung *kata ton theon* nicht genügen würden, einer Prüfung, die er dem Auftrag des Gottes gemäß durchführt und die darauf zielt, die Bedingungen frei zu legen, die ein Wissen zu einem wirklichen Wissen machen.[94]

Wie dem auch sei, dauerhaften Einfluss hat das negative Urteil des Sokrates nicht gehabt. Dabei spielt natürlich auch der Sokrates Schüler Platon eine wichtige Rolle. Die von Platon geschaffene literarische Figur SOKRATES redet nämlich ganz anders über die Geometrie als der historische Sokrates:

> SOKRATES: Ihre Ausdrücke (die der Geometrie; NF) sind höchst lächerlich und gezwungen; denn als ob sie etwas ins Werk setzen und eine reale Wirkung erzielen wollten, wählen sie alle ihre Ausdrücke als da sind viereckigmachen (quadrieren) beispannen (oblongieren) hinzutun (addieren) und was sie sonst noch alles für Worte im Munde führen; tatsächlich aber ist der eigentliche Zweck dieser ganzen Wissenschaft nichts anderes als reine Erkenntnis.
> GLAUKON: Ganz entschieden.
> SOKRATES: Dazu müssen wir uns doch über folgendes verständigen?
> GLAUKON: Worüber?
> SOKRATES: Daß diese Erkenntnis auf das ewig Seiende geht, nicht aber auf dasjenige, was bald entsteht und wieder vergeht.
> GLAUKON: Damit hat es keine Not, denn die geometrische Erkenntnis bezieht sich immer auf das Seiende.
> SOKRATES: So läge denn, mein Trefflicher, in ihr eine Kraft die die Seele nach der Wahrheit hinzieht und philosophische Denkart erzeugt insofern, als wir dann nach oben richten, was wir jetzt verkehrterweise nach unten richten. (Platon: Der Staat. Siebentes Buch, St. 527)[95]

Getreu dem Motto *Wer schreibt, der bleibt*, hat die platonische Figur namens SOKRATES, den historischen Sokrates längst überwuchert. Der historische Sokrates hat es nämlich verabsäumt, sich selbst schriftlich zu äußern. Und so kann Platon seine Figur SOKRATES problemlos zum Sprachrohr seiner eigenen Geometrie-Begeisterung machen.[96]

---

93 Xenophon: Erinnerungen an Sokrates. Übersetzt v. Rudolf Preiswerk. Stuttgart: Reclam 2002. S. 143
94 Monique Canto-Sperber: Sokrates. In: Das Wissen der Griechen. Wilhelm Fink Verlag: München 2000. S. 692
95 Platon: Der Staat; in: Platon, Sämtliche Dialoge; Bd V. Übers. von Otto Apelt. Leipzig: Meiner Verlag 1998. S. 288
96 Siehe hierzu auch: *Platon: Mathematik, Ideenlehre und totalitäre Staatsutopien* unter www.antike-griechische.de/Platon.pdf, insbesondere den Abschnitt *Platon und die Mathematik.*

Die Mathematik und die empirischen Wissenschaften

Das Aufblühen der Mathematik erfolgt parallel zur Herausbildung verschiedener empirischer Wissenschaften. Schon das alte pythagoreische Lehrprogramm der vier *Mathemata* enthält neben Arithmetik und Geometrie auch die Disziplinen *Harmonielehre* und *Astronomie*. Dieses Bildungsprogramm ist in der Antike höchst einflussreich. Nahezu jeder Mathematiker, den wir aus der Antike kennen, hat auch an Problemen aus dem Bereich Harmonielehre und Astronomie gearbeitet. Auch Platon propagiert diesen pythagoreischen Lehrplan. Noch das mittelalterliche Lehrprogramm der *Sieben Freien Künste* beinhaltet diesen nun *Quadrivium* genannten pythagoreischen Vier-Fächer-Kanon.[97]

Die Mathematik war also in der Antike schon von Anfang an aufs Engste mit anderen Disziplinen verbunden. Bei der antiken *Harmonielehre* handelt es sich um ein mathematisch-ästhetisches Projekt, das auch einige empirische Aspekte hat. Die meist sehr stark mathematisch geprägten Arbeiten zur Harmonielehre beschäftigen sich gern mit den Fragestellungen und mathematischen Problemen, die sich aus den Prinzipien der pythagoreischen Harmonielehre ergeben.

Die griechische *Astronomie* hatte im 4. Jh. noch einen langen Weg vor sich, bevor sie die Reife des Almagest erreichte.[98] Aber man hatte bereits begonnen, sich mit der Frage der genauen Länge des astronomischen Jahres und der astronomischen Jahreszeiten zu beschäftigen. Mit den homozentrischen Sphären des Eudoxos hatte man zudem schon die Tradition ambitionierter geometrischen Modelle in der Astronomie gestiftet.[99] Von nun an entwickelt sich die Astronomie immer mehr zu einer mathematisierten Naturwissenschaft im modernen Sinn. In der Antike ist die Astronomie dabei auf ähnliche Weise die Schwester-Wissenschaft der Mathematik wie heute die Physik.

Die großen Fortschritte in der Geometrie begünstigen die Geografie. Die Vermessung wie Kartographierung der Erde ist eine Aufgabe, die immer besser gelingt. Bereits im 3. Jh. v.Chr. erzielt Eratosthenes eine ziemlich genaue Bestimmung des Erdumfangs.

Der durch die Geometrie geprägte Blick auf die Welt lässt eine stark durch die Geometrie geprägte antike Optik entstehen. Obwohl sich der griechischen Antike die physikalischen Grundlagen des Sehens nicht erschließen, entstehen doch einige interessante Resultate.

Dem mathematischen Jahrtausend-Genie Archimedes gelingt mit dem Hebelgesetz und dem Prinzip des hydrostatischen Auftriebs die Formulierung zweier gänzlich moderner und bis heute gelehrter Naturgesetze. Bei den physikalischen Arbeiten des Archimedes sieht man allerdings auch, dass die in der Mathematik entstandenen Ideale einer *beweisenden Wissenschaft* weit über die Mathematik hinaus als Maßstab für gute Wissenschaft galten.

Die Antike kannte die heute gängige Unterscheidung zwischen Formal- oder Strukturwissenschaft *einerseits* und empirischer Wissenschaft *andererseits* in dieser Form *nicht*. Damals sah es so aus, als könne die Geometrie mit mathematischen Beweisen zuverlässige Erkenntnisse über die Welt erzielen. Spätestens die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien hat jedoch klar gestellt, dass sich die empirische Untersuchung der Welt nicht durch die Ausarbeitung einer axiomatischen Theorie ersetzen lässt. Die empirischen Wissenschaften benötigen also ein anderes Wissenschaftsmodell als die Mathematik.

97 Das Niveau des mittelalterlichen Quadriviums sollte man allerdings nicht überschätzen. Es bleibt weit hinter den Standards der griechischen Antike zurück. Vor allem die Zeit zwischen 700 und 1.000 ist im katholischen Europa eine Zeit mathematischer Ahnungslosigkeit. Die geometrischen Kenntnisse endeten damals kurz hinter den Definitionen solch einfacher Objekte wie Dreieck, Quadrat, Kreis, Pyramide und Kegel. Nahezu alle Kenntnisse aus der beweisenden Mathematik der Griechen waren verloren gegangen. Das antike Wissen musste im späten Mittelalter aus islamischen und byzantinischen Quellen neu erworben werden. Dieser Prozess begann im 11. Jh.

98 Dem Almagest liegt zwar ein geozentrisches Weltbild zu Grunde, aber die astronomischen Phänomene werden in einer solchen Qualität modelliert, dass er für ca. 1.500 Jahre das dominierende astronomische Lehrbuch blieb.

99 Siehe hierzu auch *Eudoxos & Co. - Die Anfänge der wissenschaftlichen Astronomie* unter www.antike-griechische.de/Eudoxos.pdf

Der Einfluss der Mathematik auf die griechische Philosophie

Der größte und bedeutendste Einfluss, den die Mathematik ausübte, besteht selbstverständlich in der Erziehung zum logisch sauberen Argumentieren. Durch die Ablösung von der Anschauung als entscheidender Quelle des mathematischen Beweisens hat die beweisende Mathematik die Techniken der *logisch korrekten Herleitung* kultiviert. Der in der Mathematik bereits früh streng verwendete *indirekte Beweis* hat dem philosophischen Einsatz der Argumentationsfigur *reductio ad absurdum* viel Auftrieb gegeben. Ja, man kann sagen, dass die verwickelte und vielverzweigte Tradition der *philosophischen Dialektik* eigentlich nur drei Wurzeln hat: Diese Argumentationsfigur, den Dialog als Grundform der argumentativen Auseinandersetzung und die Vorliebe fürs philosophisch Dunkle (etwas, was wir z.B. von Heraklit, *dem Dunklen* ebenfalls aus der Antike kennen).

Obwohl die beweisende Mathematik sicherlich den entscheidenden Beitrag zur Kultivierung des logischen Schließens geleistet hat, muss man zur Kenntnis nehmen, dass in der Philosophie-Geschichte mit den Eleaten, namentlich *Parmenides,* häufig ganz anders orientierte Kandidaten als Urheber des logisch-begrifflichen Denkens präsentiert werden. Bei näherer Betrachtung erweist sich aber Parmenides (samt seiner Philosophen-Schule in Elea) eher als der Vater des *philosophischen Trugschlusses*, denn als Urquell des streng logischen Denkens. Aus Gründen, die mir unzugänglich sind, hält man allerdings in der Philosophie-Geschichte immer noch gerne an Parmenides als Erfinder der logisch argumentierenden Philosophie fest. Das Resultat seiner „logischen Analyse", dass es keine Veränderung gibt und das Seiende eine ewig unveränderliche Kugel sei, hat damals jedoch (was nicht besonders erstaunlich ist) nur wenige überzeugt und war insgesamt ein etwas schlechter Start für die philosophische Logik.[100]

Der Erfinder der *formalen Logik*, Aristoteles, beschäftigt sich denn auch mehr mit den Quellen der eleatischen Fehlschlüsse,[101] als mit den Beiträgen der Eleaten zur Entwicklung der Logik. Wir können also in der formalen Logik (beruhigender Weise) eher das Ergebnis einer Auseinandersetzung mit den Schlussweisen der beweisenden Mathematik denn mit der eleatischen Philosophie sehen.

Dass Aristoteles eine Grammatik des korrekten Schließens, die syllogistische Logik, als *erste* Form einer formalen Logik entwickelt hat, ist sowohl immens verdienstvoll wie prägend für den ganzen weiteren Verlauf der griechischen Antike.[102] Im Gegensatz zu den Fehlschlüssen des Parmenides wird die syllogistische Logik nämlich allgemein akzeptiert. Mehr noch, die *megarische Schule* und die *Stoiker* entwickeln, ergänzend zur Term-Logik der Syllogismen, ein Grundgerüst der Aussagenlogik.

Es gibt noch einen weiteren Punkt, an dem ein Denker wie Aristoteles ganz offensichtlich von den Erfahrungen einer beweisenden Mathematik geprägt wurde: Seine Wissenschaftslehre. Er empfiehlt allen Wissenschaften, sich am beweisenden Vorgehen der Mathematik zu orientieren.

> Wir glauben aber etwas zu wissen, schlechthin, nicht nach der sophistischen, akzidentellen Weise, wenn wir sowohl die Ursache, durch die es ist, als solche zu erkennen glauben, wie auch die Einsicht uns zuschreiben, daß es sich unmöglich anders verhalten kann.
> Aristoteles: Lehre vom Beweis (Zweite Analytik), Buch I, Kap. 2, 71b[103]

100 Siehe hierzu auch *Vorsokratik: Von Xenophanes bis Demokrit* unter: www.antike-griechische.de/Vorsokratik-2.pdf
101 Siehe hierzu z.B. Aristoteles: Physik. Buch VI, Kap. 9 (Kritik der Paradoxa des Eleaten Zenon)
102 Siehe hierzu auch *Aristoteles – Logik und Methodik in der Antike* unter: www.antike-griechische.de/Aristoteles.pdf
103 Aristoteles: Philosophische Schriften, Bd. 1, Organon IV. Übersetzt von Eugen Rolfes. Hamburg: Meiner Verlag 1995. S. 3. Hinweis: Der Begriff *Ursache* wird hier in einem sehr viel weiteren Sinne gebraucht, als dies heute üblich ist.

Wie im weiteren Verlauf des Textes deutlich wird, geht es hier um die Propagierung eines Modells der *beweisenden Wissenschaft* als Quelle jeglicher Art des Wissens. Salopp formuliert: Aristoteles empfiehlt „Von der Mathematik lernen, heißt Wissenschaft lernen".

Bei aller Liebe zur Mathematik, von allen Wissenschaften zu verlangen, dass sie sich in beweisende Wissenschaften verwandeln, ist etwas zu viel verlangt. Aristoteles geht aber noch weiter, er verlangt, dass alle Resultate aus wenigen ersten Grundsätzen und Prinzipien hergeleitet werden. Er verlangt also zusätzlich, dass die Wissenschaften einen *axiomatischen* Aufbau haben sollten, etwas, was wir von der Geometrie in Euklids *Elementen* kennen. Da Euklid aber *nach* Aristoteles geschrieben hat, stellt sich die spannende Frage, hatten die voreuklidischen Elemente bereits einen axiomatischen Aufbau und Aristoteles hat dies von dort in seine Wissenschaftslehre übernommen oder hat erst Aristoteles in dieser klaren Form das Konzept der axiomatischen Wissenschaft erdacht und Euklid hat es dann von ihm übernommen? Wir wissen es nicht. Wir wissen nur, dass in Euklids *Elemente* die uns von Aristoteles her bekannte Unterscheidung zwischen Axiomen und Postulaten auftaucht.

Die aristotelische Wissenschaftslehre macht im Übrigen auch deutlich, entlang welcher Linie sich Aristoteles die Aufgabenteilung zwischen Wissenschaft und Philosophie vorstellt. Ihre obersten Grundsätze und Prinzipien erhalten die Wissenschaften jeweils von der Philosophie vorgegeben. Innerhalb dieses Rahmens dürfen dann die Wissenschaften selbstständig schalten und walten. Bei aller Sympathie, die Aristoteles für die Wissenschaft hegt, ihre ersten Grundsätze, Prinzipien und allgemeinsten Voraussetzungen sollten sich die Wissenschaften doch besser von den Philosophen vorgeben lassen.

Die Idee, dass die Wissenschaften bei ihrer Grundlegung der Philosophie bedürfen, taucht schon bei Platon auf. In den letzten Abschnitten von Buch VI des Dialogs *Der Staat* (Politeia), lässt Platon seine Figur Sokrates Entsprechendes vortragen. Zur Bestimmung erster Sätze (Prämissen), oberster Prinzipien und Grundsätze bedarf es, so die These, der Philosophie. Erst wenn der Philosoph solche Voraussetzungen als zuverlässig geltend bestimmt hat, kann/darf der deduktiv arbeitende Wissenschaftler produktiv werden.

Platon, der schon in der Antike den Beinamen *der Mathematiker* erhielt, ist vor allem von der Geometrie fasziniert. Mehr noch als die logische Strenge beeindruckt ihn die Ablösung der Gegenstände der Geometrie von der Welt der sinnlichen Erfahrungen. Die Gegenstände der Geometrie haben Eigenschaften, für die es in der Sinnenwelt kein Vorbild gibt. So haben ihre Linien z.B. keine Breite, ihre Punkte keine Ausdehnung. Zudem sind die Gegenstände der Geometrie immun gegen alle Veränderungen. In ihrer Welt gibt es kein Werden und kein Vergehen. Platon radikalisiert dieses Konzept der Idealisierung und entwickelt so seine Ideenlehre, eine zutiefst durch die Mathematik inspirierte Philosophie.

Für Platon ist es selbstverständlich, dass auch Dinge außerhalb unserer Erfahrungswelt existieren (siehe z.B. die Punkte, Linien, Dreiecke der Geometrie). Mehr noch, diese sind der eigentliche Gegenstand von Erkenntnis. Tiefe, wirkliche Erkenntnis ist bei den Gegenständen unserer Erfahrungswelt gar nicht möglich. Hier haftet allen Urteilen immer der Beigeschmack des bloßen Meinens an. Das wahrhaft Seiende ist die Welt der *Ideen*. Etwas, was nochmals weiter von der Welt der sinnlichen Erfahrungen entfernt ist als die Welt der idealen Objekte der Geometrie. Der Aufstieg zur höchsten Idee, der *Idee des Guten*, ist wenigen vorbehalten. Und diese Wenigen sind zum Herrschen über die Vielen bestimmt.

So hat Platon ausgehend von einer philosophischen Ausdeutung der Geometrie eine autoritäre bis totalitäre Staatsphilosophie entwickelt. Man sieht, nicht jeder Aspekt einer mathematisch inspirierten Philosophie ist automatisch beeindruckend und brillant.[104]

104 Siehe hierzu auch: *Platon – Mathematik, Ideenlehre und totalitäre Staatsutopien* unter: www.antike-griechische.de/Platon.pdf

Nachtrag: Griechische Zahlzeichen und Zahlsysteme

Die Griechen verwendeten verschiedene Zahlsysteme. Nur *drei* davon sollen hier kurz charakterisiert werden:

1. Das akrophone, attische oder herodianische Zahlsystem: Die Einer wurden durch Striche markiert, die Werte 10, 100, 1.000, 10.000 jeweils durch den Anfangsbuchstaben des entsprechenden griechischen Zahlwortes dargestellt (**Δ**=10, **Η**=100, **Χ**=1.000, **Μ**=10.000). Der Zahl 5 (ΠΕΝΤΕ) wurde entweder durch **Γ** (ein alte, damals schon nicht mehr gebräuchliche Form des großen Pi) oder den Buchstaben **Π** (Pi) dargestellt. Durch Kombination des dann als Faktor zu lesenden **Γ** (oder **Π**) mit den Zahlzeichen **Δ**, **Η**, **Χ** und **Μ** konnten die Werte 50, 500, 5.000 und 50.000 dargestellt werden.
   Das attische (Zahlsystem; NF) diente vorwiegend im kaufmännischen Leben zur Fixierung von Geld- und Warenangaben sowie zur Bezeichnung der Spalten auf dem Abakus. Zum schriftlichen Rechnen war das attische Zahlsystem denkbar ungeeignet.[105]
2. Das milesische Zahlsystem:
   Zur Bezeichnung der Zahlen im milesischen System verlieh man den Buchstaben des Alphabets einen Zahlenwert, und zwar zunächst für die 27 Zahlen
   1,2,...,9
   10,20,...,90
   100, 200,...,900
   Da aber die 24 Buchstaben des griechischen Alphabets nicht ausreichten, wurden noch drei semitische Buchstaben (Vau, Koppa, Sampi für 6, 90 und 900) herangezogen. (...) Überdies wurden neben den kleinen auch große Buchstaben in derselben Weise verwendet. Für die Tausender wurden wieder die Buchstaben der Einer verwendet; sie erhielten zur Unterscheidung einen Strich links unten. Zur Bezeichnung der Zehntausender waren zwei verschiedene Schreibweisen in Gebrauch. Entweder man benutzte das M, den Anfangsbuchstaben von ΜΥΡΙΟΙ und schrieb die Anzahl der Zentausender über das M (…). Oder aber – so verfuhr man in späterer Zeit – man machte eine Zahlenangabe als Angabe in Myriaden dadurch deutlich, dass man zwei Punkte über die Buchstaben setzte. (…) Die Bezeichnungsweise noch höherer Zehnerpotenzen – dazu war Archimedes in der „Sandrechnung“ genötigt – war nicht einheitlich. Jeder Autor benutzte seine eigene Notierung.[106]

   Um eine Verwendung der Buchstaben als Zahlzeichen deutlich zu machen, konnte entweder die ganze Zahl überstrichen werden oder am Schluss der Zahl oben ein Strich angebracht werden.
3. Die griechische Adaption des Sexagesimalsystems: Bei komplizierteren Rechnungen, wie sie z.B. in der Astronomie häufiger auftraten, griff man in der hellenistischen Periode gern auf das babylonische Sexagesimalsystems zurück. Im Almagest wird so z.B. einerseits ein Stellenwertsystem mit der Basis 60 verwendet, anderseits werden die (mit einem Stellenwert versehenen) Zahlen von 1 bis 59 mittels des milesischen Zahlsystems dargestellt.

Bruchzahlen konnten mit Hilfe des Sexagesimalsystems dargestellt (genähert) werden. Es gab aber auch Anlehnungen an das ägyptische System der Stammbrüche, sowie Ansätze zu dessen Erweiterung in Richtung heutiger Bruchzahlen. Bei Eratosthenes (ca. 276 – 194 v.Chr.) taucht z.B. der Wert 11/83 auf. Damals wurden solche Brüche in der Form *Nenner über Zähler* notiert. Die Schreibweise *Zähler über Nenner* taucht erst später auf.

105 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 151
106 Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Bd 1. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2008. S. 153

Anhang

Abbildungen

Das Titelbild zeigt eine Pythagoras Büste aus dem Vatikan Museum (Rom). Das Bild wurde dem Wikimedia Commons Archiv entnommen und ist gemeinfrei.

Abb. 19 auf Seite 35 wurde von Lutz Führer bereitgestellt und ist gemeinfrei.

Abb. 20 auf Seite 36 (Näherung des Kreises durch Ober- und Untersummen – Archimedes_pi.svg) wurde dem Wikimedia Commons Archiv entnommen. Sie stammt von *Leszek Krupinski* und unterliegt der Lizenz Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported (siehe: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode). Der Abbildung wurde ein Hyperlink unterlegt, der zur zugehörigen Referenz-Seite in Wikimedia führt (http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg).

Alle anderen Abbildungen wurden selbst erstellt und sind gemeinfrei.

Empfehlungen

Bücher

Helmuth Gericke: Mathematik in Antike und Orient
enthalten im Doppelband Mathematik in Antike, Orient und Abendland

Obwohl das Buch vorwiegend für Mathematik Studenten bestimmt ist, kann es von jedermann mit guten Mathematik-Kenntnissen auf Abitur-Niveau mit Gewinn gelesen werden.

Thomas Heath: A History of Greek Mathematics, Volume I

Eine umfassende Darstellung der griechischen Mathematik der ionischen und athenischen Periode. Ein kluges Buch. Ein lehrreiches Buch. Ein Klassiker! *Wer Mathematik liebt und Bildung mag, der sollte es besitzen.*

Zur Literaturliste (Literaturempfehlungen) auf www.antike-griechische.de.

Links

http://www.spasslernen.de/geschichte/ges1.htm
Eine schöne Darstellung des altägyptischen Zahlsystems von Wolfgang Appell.

http://www.spasslernen.de/geschichte/ges4.htm
Eine schöne Darstellung des babylonischen Zahlsystems von Wolfgang Appell.

http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike.pdf
Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht von Manfred Kronfellner (TU Wien)

Von den alten Ägyptern und Babyloniern bis zur Spätantike. Ein gut lesbarer, reichlich bebildeter und höchst lehrreicher Text (68 S., PDF-Dokument).

http://www.uni-graz.at/~gronau/Gm.pdf
Vorlesungsskript von D. Gronau zur Geschichte der Mathematik (Uni Graz)

Überblick von den ägyptischen und babylonischen Anfängen bis hin zu Newton und Leibniz (104 S., PDF-Dokument).

http://archive.org/stream/cu31924008704219#page/n7/mode/2up
Thomas Heath: A History of Greek Mathematics, Volume 1

Online Version des Standardwerks von Thomas Heath.